

На правах рукописи

Антипин Александр Николаевич

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ  
ВО ВНУТРЕННИХ ОБЛАСТЯХ ЗЕМЛИ И ЛУНЫ НА СТАДИИ ИХ  
АККУМУЛЯЦИИ

Специальность 25.00.10 – «Геофизика, геофизические методы поисков  
полезных ископаемых»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических  
наук

Екатеринбург 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении  
науки Институте геофизики им. Ю. П. Булашевича УрО РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Хачай Юрий Васильевич

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

Защита состоится «\_\_» \_\_\_\_\_ 2017г. в \_\_:\_\_ часов на заседании  
Диссертационного Совета Д 004.009.01 в Институте геофизики им. Ю.П.  
Булашевича по адресу: 620016, Россия, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, 100.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института геофизики им.  
Ю. П. Булашевича

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016г.

Ваш отзыв в одном экземпляре, заверенный гербовой печатью, просим  
направлять по адресу: 620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, 100, ИГФ  
УрО РАН, учёному секретарю диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, профессор

Ю.В. Хачай

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение тепловой эволюции имеет большое значение для наук о Земле, поскольку, прямо или косвенно, является причиной геодинамических и тектонических процессов. Представления о тепловой истории возможно получить только из теоретических расчётов, опирающихся на теорию теплопроводности. При этом встаёт вопрос о начальном распределении температуры во внутренних областях Земли, то есть о распределении температуры ко времени практического завершения её роста. Получить подобную информацию можно в результате численного моделирования, основываясь на модели формирования планеты. В настоящее время общепринятым сценарием формирования Земли и Луны является аккумуляция из допланетного газопылевого диска. Длительность этого процесса для Земли около 100 миллионов лет, подтверждается изотопными данными [Витязев, Печерникова, Сафронов, 1990; Печерникова, 2005].

Ранние модели формирования Земли путём аккумуляции приводили к формированию однородной, сравнительно холодной планеты, и все они сталкиваются с проблемой существования источников тепла, способных разогреть Землю на ранних этапах эволюции за относительно короткое время до образования жидкого, преимущественно железного, ядра. Решением этой проблемы могла послужить модель мегаимпакта [Hartmann, Davis, 1975], в которой предполагается столкновения почти сформировавшейся Земли с телом, сопоставимым с массой Марса.

Однако, результаты, полученные в работах [Jacobsen, Yin, 2003; Krot et al. 2009] на основе анализа W – Hf изотопной системы, интерпретируются как свидетельство очень раннего, за время менее 5 – 10 миллионов лет, разделения химических резервуаров ядра и мантии. Разделение должно было бы произойти до формирования большей части массы Земли, что не может быть объяснено гипотезой мегаимпакта.

Важный результат, полученный в последнее время, - это возможный источник энергии, который мог бы разогреть первичные тела на раннем этапе аккумуляции выше температуры плавления. В работах [Merk, Breuer, Spohn, 2002; Анфилогов, Хачай, 2005] показано, что мощности короткоживущих радиоактивных элементов, прежде всего  $^{26}\text{Al}$ , достаточно для нагрева до температуры плавления железа в телах размером около 10 – 1000 километров, рост которых проходит за время, характерное для времён полураспада короткоживущих изотопов.

На основании новых данных предложен ряд моделей двухстадийного формирования планет [Agnor, Capur, Levison, 1999; Chambers, Wetherill, 1998; Kleine, Touboul, Bourdon, et al., 2009; Walter, Tronnes, 2004; Анфилогов, Хачай, 2005; Анфилогов, Хачай, 2008; Khachay, Anfilogov, 2009]. На первой стадии в процессе гетерогенной аккумуляции произошло формирование первичных зародышей протопланет, разогретых выше температуры плавления, из которых на следующем этапе формировалось ядро планеты, а затем силикатная мантия. При такой модели формирования Земли в работах [Khachay, 2015; Хачай, Анфилогов, Антипин, 2015] показано, что при росте ядра, возможно, трижды происходила смена механизмов конвекции, и с образованием внешнего ядра формируются условия генерации геомагнитного поля.

Температура на верхней границе растущей планеты не постоянна, а существенно меняется в связи со случайным характером гравитационного взаимодействия аккумулялируемых тел [Anfilogov, Khachay, 2015; Khachay, Anfilogov, 2013]. Например, наиболее крупные тела могли создавать температурные неоднородности мантии, которые могли сохраняться в течение 1 – 2 миллиардов лет [Сафронов, 1965; Любимова, 1968, Kaula, 1979]. В работе [Светцов, Шувалов, 2005] проанализированы последствия ударов астероидов разного размера для Земли, имеющей кору толщиной 40 километров, мантию и железное ядро. Максимальная глубина, где мантия может оказаться

полностью расплавленной, изменяется в пределах около 100 – 400 километров для тел диаметром 50 – 400 километров соответственно.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена следующими факторами:

1. наличием новых данных, свидетельствующих о возможном расплавленном состоянии планеты на раннем этапе её аккумуляции;

2. необходимостью учитывать все значимые, известные на сегодня, источники тепла в период аккумуляции в связи с возможностью возникновения конвективных процессов и появления МГД – динамо в период активной аккумуляции Земли;

3. необходимостью рассматривать двух и трёхмерные модели тепловой эволюции в период аккумуляции для исследования влияния тепловых неоднородностей в поверхностном слое планеты, возникающие вследствие случайного падения тел разного размера.

Степень разработанности. Интерес к изучению распределения температуры на активном этапе аккумуляции Земли и Луны нашёл своё отражение в многочисленных публикациях исследований российских и зарубежных авторов.

Существенным этапом в оценке начальной температуры растущих планет стали результаты, полученные в работах [Сафронов, 1959; 1969], в которых было рассмотрено нагревание поверхности растущей планеты ударами тел и частиц. Последующие модели разогрева Земли и Луны постепенно усложнялись. Были произведены оценки начальной температуры с учётом выделения энергии адиабатического сжатия, радиоактивного распада долгоживущих и короткоживущих изотопов, ударов тел разного размера и гравитационной дифференциации [Любимова, 1955; Любимова, 1968; Рускол, 1975; Сафронов, Козловская, 1977; Сафронов, 1982; Калинин, Любимова, Парфенюк, 1987; Ипатов, 1987; Wetherill, 1985; Kaula, 1979; Хачай, 1987; Витязев, Печерникова, Сафронов, 1990; Витязев, 2004]. Вопросы формирования первичной атмосферы и её влияние на распределение

начальной температуры во внутренних областях Земли обсуждались в работах [Hayashi, Nakazawa, Mizuno, 1979; Abe, 1997; Хачай, Анфилогов, Антипин, 2012].

В последние годы появилось множество работ, в которых отводится существенная роль как источника тепла в первые миллионы лет аккумуляции планет короткоживущего естественного радиоактивного изотопа  $^{26}\text{Al}$  [Печерникова, Витязев 2005; Nyquist et al., 2009; Ouellette et al., 2009; Анфилогов, Хачай, 2005; Khachay, Anfilogov, 2009 и др.].

Среди современных исследований проблемы следует отметить работы следующих авторов: Галимов Э.М., Витязев А.В., Печерникова Г.В., Кусков О.Л., Парфенюк О.И., Amelin, P., Allegre C.J., Scherstein A., Krot A. N., Kline T., Merk R., Nyquist L.E., Ouellette N.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является исследование тепловой эволюции Земли и Луны в период их активной аккумуляции.

Для достижения цели исследования поставлены следующие задачи:

1. Проанализировать современное состояние проблемы распределения температуры планет на стадии их активной аккумуляции.
2. Уточнить постановку задачи распределения температуры во внутренних областях Земли и Луны во время их аккумуляции, учитывая адиабатическое сжатие, задачу Стефана и случайное распределение падающих тел на поверхность растущих Земли и Луны.
3. Реализовать алгоритм численного решения поставленной задачи для трёхмерного сферически-симметричного тела увеличивающегося радиуса.
4. Провести ряд численных экспериментов и проанализировать полученные данные.

Научная новизна.

1. Предложена математическая модель и вычислительный алгоритм для изучения тепловой эволюции Земли и Луны в период их активной аккумуляции, учитывающие неравномерное нагревание формирующегося

верхнего слоя, возникающее вследствие случайного распределения тел по массам, падающих на поверхность протопланеты.

2. При численной реализации предложенной модели впервые получены трёхмерные распределения температуры во внутренних областях Земли и Луны на различных этапах их аккумуляции.

Теоретическая и практическая значимость работы. Значимость диссертационной работы состоит в том, что полученные результаты можно использовать как начальное условие при решении соответствующей трёхмерной динамической задачи тепловой эволюции сформировавшейся Земли в течение её геологической истории, имеющей большое значение при решении вопросов геодинамики и тектоники.

Работа была частично выполнена при поддержке грантов РФФИ №13-05-00138, № 16-09-00540.

Методология и методы исследования. Для достижения поставленной цели использовался метод численного моделирования, состоящий из следующих этапов: постановка задачи, составление вычислительного алгоритма, программная реализация алгоритма и проведение численных экспериментов. При постановке задачи использовались методы математической физики, приводящие к уравнениям в частных производных, для их численного решения использовались метод конечных разностей. Для программной реализации алгоритма использовались методы прикладного программирования на языке C++ с использованием открытого стандарта, предназначенного для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью OpenMP. Для обработки и анализа результатов численного эксперимента применялось различное программное обеспечение графического представления данных, таких как Mathcad, Voxler, Surfer.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения.

1. Построенная математическая модель тепловой эволюции Земли и Луны, основанная на современных данных о поведении изотопных систем, позволяет получить распределение температуры, описывающее твёрдое состояние внутреннего и расплавленное состояние внешнего ядра Земли к концу активного этапа аккумуляции.

2. Результаты численного моделирования показали, что тепловые неоднородности, образованные в поверхностном слое растущей протопланеты, сохраняются во внутренних областях, по крайней мере, до конца активного этапа аккумуляции Земли и Луны.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты исследований были представлены на следующих научных форумах:

1. XIII Уральская молодёжная научная школа по геофизике, Екатеринбург, 2012;

2. Физика космоса. 41-й международная студенческая научная конференция, Екатеринбург, 2012;

3. EGU General Assembly, 2012;

4. XIV Уральская молодёжная научная школа по геофизике, Пермь, 2013;

5. Седьмые научные чтения Ю.П. Булашевича, Екатеринбург, 2013;

6. XV Уральская молодёжная научная школа по геофизике, Екатеринбург, 2014;

7. EGU General Assembly, 2014;

8. Геология и полезные ископаемые четвертичных отложений, Минск, 2014;

9. XV Уральская молодёжная научная школа по геофизике, Екатеринбург, 2015;

10. Восьмые научные чтения Ю.П. Булашевича. Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей, Екатеринбург, 2015.

Публикации. По материалам диссертационной работы было опубликовано 15 научных работ, из них 2 – в изданиях списка ВАК, 3 статьи в научных журналах и сборниках и 10 тезисов докладов.

Благодарности. Автор благодарит за постановку задачи и ценные рекомендации при подготовке работы научного руководителя д.ф.-м.н. Хачай Ю.В., а также коллектив лаборатории геодинамики института геофизики УрО РАН за поддержку и внимание.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографического списка. Материал изложен на \_\_ страницах машинописного текста, содержит \_\_ рисунков, \_\_ формул, \_\_ таблиц. Список цитированной литературы состоит из \_\_\_\_ источников, из них \_\_ на русском и \_\_ на иностранных языках.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

### Глава 1. Проблематика развития исследований теплового режима формирующейся Земли

Ранние оценки начальной температуры Земли, опирающиеся на модели однородной аккумуляции, в которых основными источниками тепла являются удары падающих тел, радиоактивный распад долгоживущих изотопов и адиабатическое сжатие, испытывают сложности для объяснения современных геологических данных раннего происхождения резервуаров ядра и мантии. Современные результаты на основе анализа W – Hf и Al – Mg изотопных систем, полученные в работах [Jacobsen, Yin, 2003; Krot et al. 2009], интерпретируются как свидетельство раннего образования ядра, в первые 10 миллионов лет после начала формирования Земли, то есть до достижения Землёй современной массы. Подобные результаты не согласуются с ранними работами, в которых образование ядра происходит после разогрева Земли в течение нескольких сот миллионов лет после формирования Земли.

В настоящее время появилось много новых данных, которые значительно изменили представления о процессе образования планет Солнечной системы. Анализ новых данных приводит к выводу, что в тепловом балансе растущей планеты, на начальном этапе аккумуляции, важную роль играет энергия короткоживущих изотопов, и в первую очередь  $^{26}\text{Al}$ , нагревая планетезимали и центральные области будущих планет выше температуры плавления вещества.

Современные интегральные оценки источников тепла и значения эффективного числа Нуссельта, достигаемые в разное время формирования Земли в первые 500 млн. лет, показывают, что в течение аккумуляции планеты значительно менялся её тепловой баланс, и внутренние области претерпевали глубокие физико-химические преобразования, требующие подробного рассмотрения тепловой эволюции на протяжении всего периода аккумуляции.

## Глава 2. Постановка задачи тепловой эволюции в период аккумуляции

При постановке задачи исследования тепловой эволюции Земли и Луны используется механизм формирования Земли и Луны, предложенный в работах [Анфилогов, Хачай, 2005; Khachay, Anfilogov, 2009]. Предложенная модель аккумуляции планет земной группы использует современные результаты изотопных геохимических анализов, позволивших получить надежные оценки концентрации короткоживущих естественно радиоактивных изотопов и, прежде всего,  $^{26}\text{Al}$  в веществе протопланетного облака [Lee, Papanastassiou, Wasserburg, 1976; Nichols, 2000; Ouellette, Desch, Bizzarro, 2009]. Рассмотренный выше двух стадийный механизм формирования Земли позволяет предложить согласованный с ним вариант образования Луны, объясняющий дефицит железа в составе Луны и высокую первичную температуру в ее недрах. Формирование Земли и Луны может быть описано с помощью модели В.С. Сафронова [Сафронов, 1969]:

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = 2(1 + 2\theta)r(t)^2\omega \left(1 - \frac{m(t)}{M_{\oplus}}\right)\sigma, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где  $m(t)$  – масса зародыша, установившаяся ко времени  $t$ ;

$\theta$  – статистический параметр, учитывающий распределение частиц по массам и скоростям в зоне «питания».

$r(t)$  – радиус растущего зародыша;

$\omega$  – угловая скорость орбитального движения;

$M_{\oplus}$  – современная масса планеты;

$\sigma_0$  – поверхностная плотность вещества в зоне «питания» планеты.

В момент времени, принятый за начальный, задаются условия:

$$m(0) = m_0, \quad r(0) = R_0,$$

$m_0, R_0$  – масса и радиус зарождающейся планеты в момент времени, принятый за начальный.

В целом задача тепловой эволюции в период аккумуляции является довольно сложной. Реальные вычислительные возможности позволяют использовать только сильно усредненное описание в сферически симметричной модели. Распределение температуры в теле увеличивающегося радиуса находится из численного решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с учетом возможности появления расплава без явного выделения положения границы фронта кристаллизации [Самарский, Маисеенко, 1965; Будак, Соловьёва, Успенский, 1965], параметрического учета конвективного теплопереноса в расплаве [Тихонов, Любимова, Власов, 1969] и переноса тепла и нагревания за счёт адиабатического сжатия. В общем виде уравнение можно записать следующим образом:

$$c_{\text{эф}}\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}\nabla T \right) = \nabla(\lambda_{\text{эф}}\nabla T) + Q, \quad (2)$$

$$t > 0,$$

$$\vec{x} \in \Omega,$$

где  $c_{\text{эф}} = c(T)$  – эффективная теплоёмкость;

$\rho = \rho(\vec{x}, t)$  – плотность;

$T = T(\vec{x}, t)$  – температура;

$t$  – время;

$\vec{V} = \vec{V}(r, t)$  – скорость сжатия внутренних слоёв нарастающими внешними;

$\nabla$  – оператор Набла;

$\lambda_{\text{эф}} = \lambda(T)$  – эффективный коэффициент теплопроводности;

$Q = Q(\vec{x}, t)$  – плотность тепловых источников;

$\vec{x} = \vec{x}(r, \theta, \varphi)$  – вектор, характеризующий положение точки в сферической системе координат;

$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$  – шар радиуса  $r$ , достигнутого ко времени  $t$ , в котором  $\Omega^+$  – область расплава,  $\Omega^-$  – нерасплавленная часть.

Уравнение дополняется начальными и граничными условиями:

$$T|_{t=0} = T_0(\vec{x}). \quad (3)$$

$$T|_{r=R} = T_{\text{пов}}(\theta, \varphi, t), \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

где  $T_{\text{пов}}(\theta, \varphi, t)$  – температура на поверхности растущей планеты.

Температура на поверхности планеты  $T_{\text{пов}}$  рассчитывается из уравнения сохранения энергии [Khachay, Anfilogov, 2009]:

$$k\rho \frac{Gm(r)}{r} \frac{dr}{dt} = \varepsilon\sigma(T_{\text{пов}}^4 - T_0^4) + \rho c_p (T_{\text{пов}} - T_1) \frac{dr}{dt}, \quad (6)$$

где  $k$  – доля преобразованной в тепло потенциальной энергии

$\rho_{\text{пов}}$  – плотность вещества, верхнего слоя;

$G$  – гравитационная постоянная;

$\varepsilon$  – коэффициент прозрачности среды;

$\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана;

$T_0$  – температура чёрного тела на расстоянии Земли от Солнца;

$c_p$  – удельная теплоемкость вещества, верхнего слоя;

$T_1$  – температура падающих тел и частиц.

Слева в уравнении (6) описана часть поступающей потенциальной энергии гравитационного взаимодействия тел. Справа первое слагаемое представляет

собой энергию, переизлучаемую телом во внешнее пространство, второе слагаемое – энергию, идущую на нагревание планеты. Уравнение (6) оценивает некую среднюю сглаженную температуру поверхности, и при решении многомерной задачи необходимо учитывать случайный характер взаимодействия тел.

Условия сопряжения на границах возникающих областей расплавов включаются в уравнения теплопроводности в виде сосредоточенной теплоёмкости на границе фаз [Самарский, Моисеенко, 1965; Будак, Соловьёва, Успенский, 1965; Самарский, Вабищевич, 2003]:

$$c_{эф}(T) = c(T) + L\delta(T - T_m), \quad (7)$$

где  $\delta(T - T_m)$  – дельта-функция Дирака.

Граница фазового перехода определяется путём сопоставления температуры в теле и температуры плавления в заданной точке.

Для вещества ядра, в основном железного состава, температура плавления вычисляется как показано в работе [Стейси, 1972]:

$$T_m(\rho) = T_{m_0} + K_0 \left( \frac{dT_m}{d\rho} \right)_0 \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho(r)} \right). \quad (8)$$

Индексом 0 обозначены начальные значения, соответствующие низким давлениям.

В мантии, формирующейся в основном силикатами, используем квадратичную зависимость температуры плавления от давления, как показано в работе [Kaula, 1979]:

$$T_m = A_T + B_T p(r) + C_T p(r)^2. \quad (9)$$

Значения параметров уравнения [Kaula, 1979]:

$$A_T = 1460^\circ K, \quad B_T = 0,29 \times 10^{-7} \frac{K}{\text{Па}}, \quad C_T = -0,92 \times 10^{-20} \frac{K}{\text{Па}^2}.$$

Мощность внутренних источников тепла представляет собой сумму выделения тепла при радиоактивном распаде  $^{26}\text{Al}$  и адиабатическом сжатии:

$$Q = Q_{^{26}\text{Al}} + Q_{\text{сж}}, \quad (10)$$

где  $Q_{^{26}\text{Al}}$  – тепловыделение при радиоактивном распаде;

$Q_{\text{сж}}$  – тепловыделение при адиабатическом сжатии.

$$Q_{^{26}\text{Al}} = \rho K_{^{26}\text{Al}} e^{-\lambda t} q, \quad (11)$$

здесь  $\rho$  – плотность вещества, содержащего  $^{26}\text{Al}$ ;

$K_{^{26}\text{Al}}$  – концентрация изотопа  $^{26}\text{Al}$  в веществе протопланетного облака в начальный момент времени;

$\lambda = \ln \frac{2}{\tau}$  – постоянная распада.

Концентрация изотопа  $^{26}\text{Al}$  в веществе протопланетного облака оценивается следующим образом:

$$K_{^{26}\text{Al}} = K_{\text{Al}_2\text{O}_3} \frac{2\mu_{\text{Al}_2}}{\mu_{\text{Al}_2\text{O}_3}} \frac{N_A}{\mu_{\text{Al}_2\text{O}_3}} \frac{^{26}\text{Al}}{^{27}\text{Al}}, \quad (12)$$

где  $K_{\text{Al}_2\text{O}_3}$  – концентрация  $\text{Al}_2\text{O}_3$  в веществе протопланетного облака в начальный момент времени;

$N_A$  – число Авогадро;

$\mu$  – молярная масса вещества.

Тепловыделение при сжатии  $Q_{\text{сж}}$  учитывается следующим образом:

$$Q_{\text{сж}} = c_p \gamma T \frac{d\rho}{dt}, \quad (13)$$

где  $\gamma$  – коэффициент Грюнайзена;

$T_0$  – температура вещества перед сжатием.

При вычислении распределения плотности  $\rho(r)$ , давления  $p(r)$  и ускорения силы тяжести  $g(r)$  предполагаем, что растущая планета представляет собой сферически симметричную, гидростатически равновесную модель. Тогда воспользуемся установленными соотношениями, описывающими распределение плотности современной Земли [Буллен, 1975; Ландау, Лившиц, 1986]:

$$\frac{dp(r)}{dr} = \rho(r)g(r), \quad (14)$$

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}, \quad (15)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (16)$$

$$0 \leq r \leq R, \quad \rho(R) = \rho_{\text{пов}}, \quad p(R) = 0,$$

где  $R$  – радиус, достигнутый растущей планетой в текущий момент времени.

Уравнения гидростатического равновесия (16) – (18) необходимо дополнить уравнением состояния  $\rho(p)$ . В качестве уравнения состояния используется уравнение Мурнагана – Берча [Стейси, 1972; Буллен, 1975; Витязев, Печерникова, Сафронов, 1990]:

$$p = \frac{3}{2} K_0 \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{7}{3}} - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{5}{3}} \right], \quad (17)$$

где  $K_0$  – изотермический модуль сжатия при нормальном давлении;

$\rho_0$  – плотность вещества при нормальном давлении.

Математическое описание тепловой эволюции Земли в период аккумуляции является сильно упрощённой моделью. Однако нестационарная краевая задача для уравнения теплопроводности (2) – (5) учитывает зависимость коэффициента теплопроводности и теплоёмкости от температуры и является нелинейной. В силу нелинейности она имеет только численное решение.

Численное решение задачи выполнено методом конечных разностей. Универсальным методом решения уравнения теплопроводности для многомерных задач является локально одномерный метод [Самарский, 1977; Тихонов, Самарский, 1999] или соответствующий ему метод расщепления [Яненко, 1967; Берковский, Ноготов, 1976].

Согласно методу, многомерное уравнение теплопроводности аппроксимируется цепочкой одномерных двухслойных шеститочечных схем с весами ( $\sigma = \frac{1}{2}$ ) в направлении каждой переменной.

$$\begin{aligned} \frac{T^{n+\frac{1}{3}} - T^n}{\tau} &= \Lambda_r \left( \sigma T^{n+\frac{1}{3}} + (1 - \sigma) T^n \right) + \psi_r, \\ \frac{T^{n+\frac{2}{3}} - T^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \Lambda_\theta \left( \sigma T^{n+\frac{2}{3}} + (1 - \sigma) T^{n+\frac{1}{3}} \right) + \psi_\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_{\varphi} \left( \sigma T^{n+1} + (1 - \sigma) T^{n+\frac{2}{3}} \right) + \psi_{\varphi}.$$

Сеточные функции в правой части  $\psi_r, \psi_{\theta}, \psi_{\varphi}$  выбираются произвольно таким образом, чтобы их сумма равнялась  $\psi_i^n$ :

$$\psi_r + \psi_{\theta} + \psi_{\varphi} = \psi_i^n.$$

Будем полагать, что  $\psi_{\varphi} = \psi_{\theta} = 0$ ,  $\psi_r = \psi_i^n$ , такой выбор не отразится на порядке точности [Самарский, 1977].

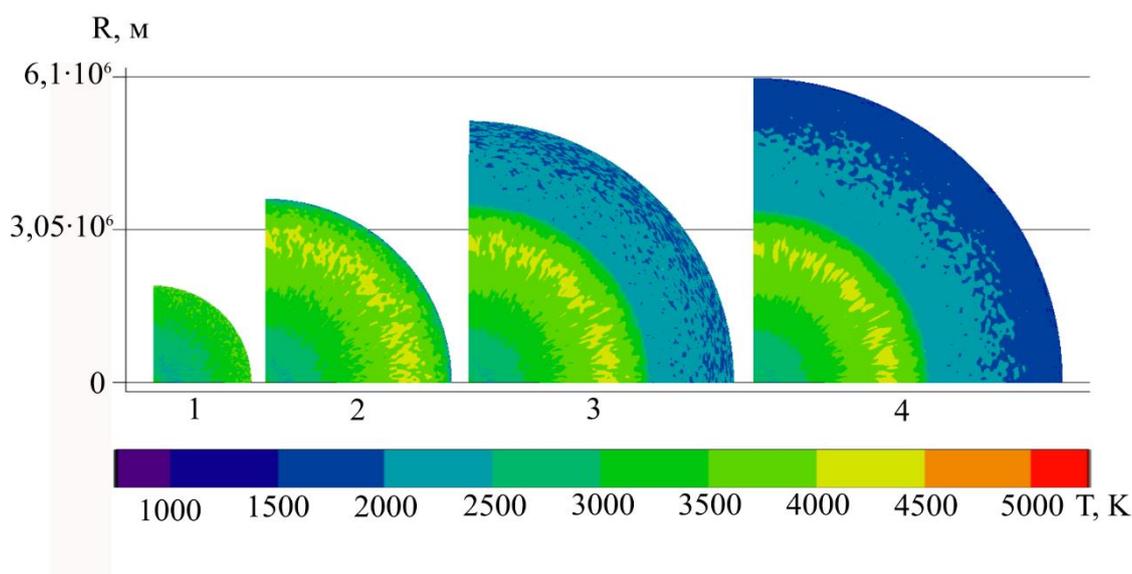
Полученная последовательность одномерных схем является локально одномерной схемой для уравнения теплопроводности. Уравнение (2) является квазилинейным, поэтому локально одномерная схема может быть записана двумя способами, линейно или нелинейно относительно значений функции  $T^{n+1}$ . Во втором случае для решение разностной схемы используется метод итераций.

### Глава 3. Результаты численных экспериментов

Используя вышеописанную численную реализацию математической модели тепловой эволюции растущей планеты, получены варианты распределения температуры для аккумулирующейся Земли и Луны (для трёхмерной модели в сферическом секторе, внутри углов по долготе и широте  $90^\circ$ ). На Рисунке 1 приведены разрезы сферического сектора последовательно растущей Земли. Полученный результат численного решения задачи для трёхмерной модели позволяет проследить образование и дальнейшую динамику трехмерных неоднородностей по температуре, возникающих за счет случайного характера падения тел и частиц на поверхность растущей планеты при случайном распределении по массам, а также изменения в тепловом балансе планеты.

На Рисунке 2 представлен один из вариантов распределение температуры во внутренних областях Луны к концу её аккумуляции. Как видно из результатов численного решения, неоднородное распределение

температуры в формирующейся Луне, определяющееся случайным распределением тел и частиц по массам и скоростям выпадающих на растущую поверхность, сохраняется и эволюционирует во внутренних оболочках.



1 – 1930 км, 2 – 3670 км, 3 – 5220 км, 4 – 6080 км.

Рисунок 1 – Распределение температуры Земли для разных значений достигнутого радиуса [Антипин, 2015]

Тепловые неоднородности во внутренних областях Земли и Луны, возникшие от случайных ударов, не успевают сгладиться за время аккумуляции до 90% от их современной массы.

На Рисунке 3 и Рисунке 4 для тех же результатов распределения температуры представлено распределение температуры плавления для Земли и Луны соответственно. Из сопоставления результатов, представленных на Рисунке 1 и Рисунке 3, можно проследить эволюцию областей расплава в растущей Земле. Так на завершающем этапе роста планеты можно наблюдать слой расплава, имеющий также неоднородную тепловую структуру во внешнем ядре. Полученное распределение температуры можно рассматривать как начальное условие для решения соответствующей трёхмерной

динамической задачи конвекции в мантии сформировавшейся Земли в течение ее геологической истории.

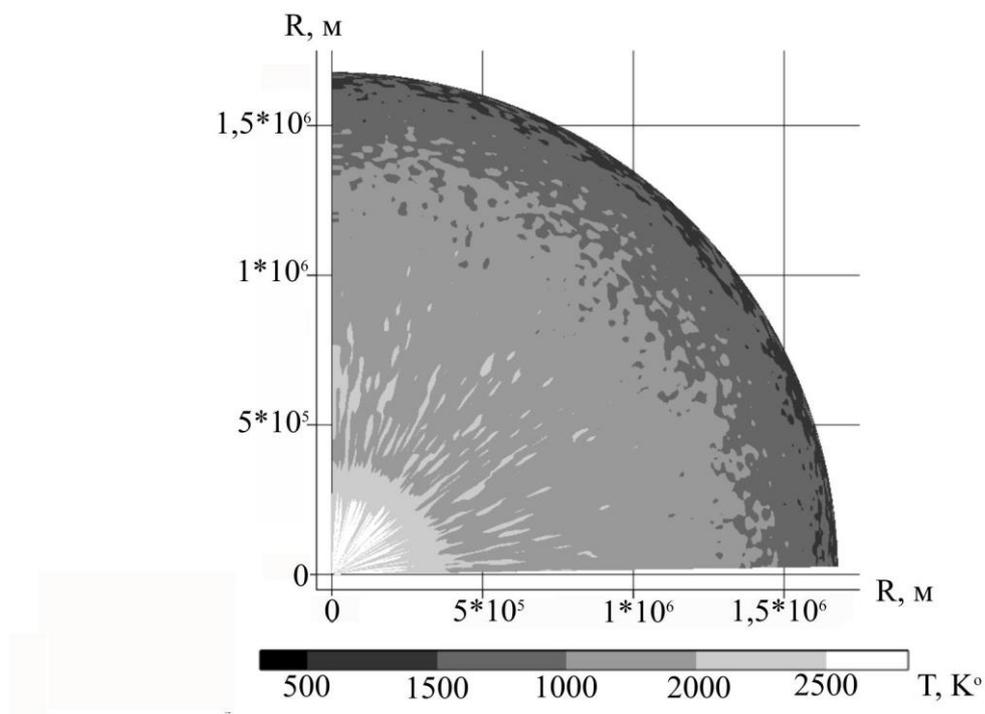
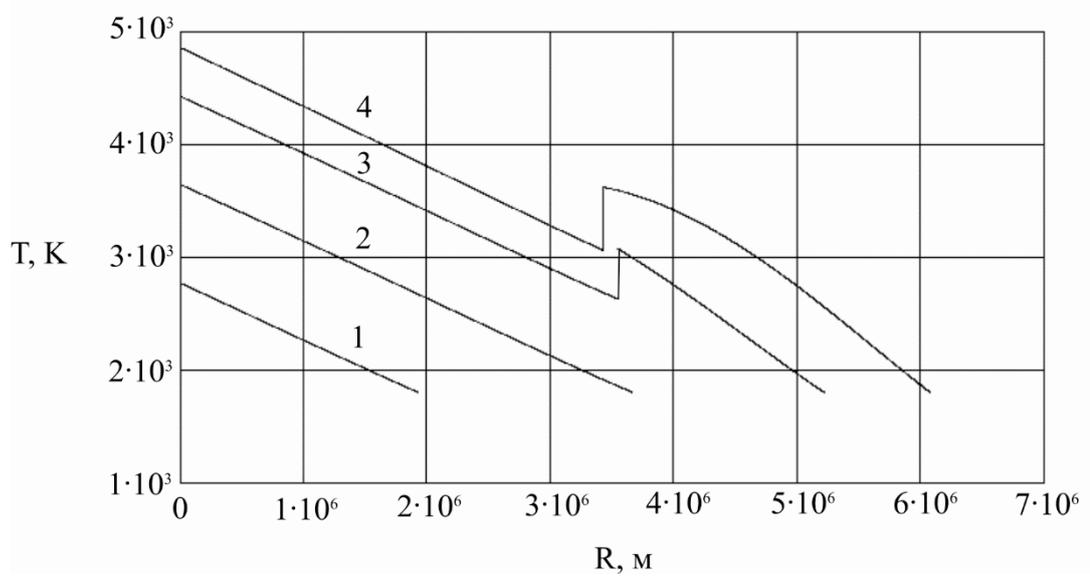


Рисунок 2 – Распределение температуры Луны, вычисленное для сферического сектора, внутри углов по долготе и широте  $90^\circ$  [Антипин, 2014].

Сопоставляя распределение температуры во внутренних областях Луны, представленный на Рисунке 2, и распределение температуры плавления, показанное на Рисунке 4, можно сделать вывод, что Луна была частично расплавлена к концу аккумуляции.



1 – 1930 км, 2 – 3670 км, 3 – 5220 км, 4 – 6080 км.

Рисунок 3 – Распределение температуры плавления для разных значений достигнутого радиуса [Антипин, 2015].

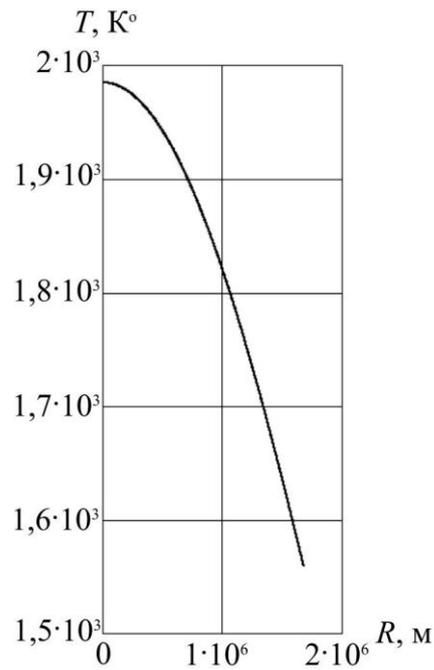


Рисунок 4 – Распределение температуры плавления по радиусу во внутренних областях Луны [Антипин, 2014].

Этот результат согласуется с выводами, сделанными в работе [Левин, Маева, 1975; Kaula, 1971] что Луна прошла через стадию интенсивной магматической дифференциации, которая происходила одновременно с её ростом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В результате анализа опубликованных работ обоснована необходимость исследования тепловой эволюции при аккумуляции Земли и Луны.

2. Выполнено математическое описание тепловой эволюции во внутренних областях Земли и Луны во время их аккумуляции, учитывая адиабатическое сжатие, задачу Стефана и случайное распределение падающих тел на поверхность растущих Земли и Луны.

3. Реализован численный алгоритм решения поставленной задачи для трёхмерного сферически-симметричного тела увеличивающегося радиуса и реализован в виде программы для ЭВМ в интегрированной среде разработок программного обеспечения Microsoft Visual Studio 2010 (лицензионное программное обеспечение, предоставленное ИГФ УрО РАН, MSDN подписка «DreamSpark Premium», №20200871) на языке Visual C++, с использованием открытого стандарта распараллеливания программ OpenMP.

4. Получены возможные варианты распределения температуры во внутренних областях Земли и Луны в шаровом секторе с углами  $90^\circ$  для разных значений достигнутой массы.

5. Анализ результатов показал, что неоднородное распределение температуры в формирующихся внешних оболочках планеты, являющихся следствием случайного распределения выпадающих на поверхность тел и частиц, образуют значительные неоднородности теплового поля и сохраняются по крайней мере до завершения активного этапа аккумуляции.

6. Вычисленные результаты можно рассматривать как начальные условия для решения соответствующей трёхмерной динамической задачи термической эволюции Земли и Луны в течение ее геологической истории.

7. Результаты исследования тепловой эволюции получены для довольно идеализированной модели. Для более уверенных выводов необходимы дальнейшие уточнения модели тепловой эволюции в направлении ударного кратерообразования и гравитационной дифференциации.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях «Перечня ВАК...»:

1. Анфилогов В.Н. О взаимосвязи составов вещества Луны, первичной земной коры и мантии / В.Н. Анфилогов, Ю.В. Хачай, **А.Н. Антипин** // Литосфера. – 2015. – №. 1. – С. 109-115.

2. **Антипин А.Н.** Модель трёхмерного распределения температуры при аккумуляции Земли с учётом адиабатического сжатия и случайного распределения падающих тел / **А.Н. Антипин** // Мониторинг. Наука и технологии. – 2015. – №. 4. – С. 16-20.

Прочие публикации:

3. Хачай Ю.В. Механизмы конвекции в растущем ядре Земли и их проявление в остаточной намагниченности земных метеоритов / Ю.В. Хачай, В.Н. Анфилогов, **А.Н. Антипин** // Восьмые научные чтения Ю.П. Булашевича. Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей: Материалы конференции – Екатеринбург, 2015. – С. 350-353.

4. **Антипин А.Н.** Решение задачи теплопереноса при аккумуляции Земли в 3D модели с учётом адиабатического сжатия и случайного распределения падающих тел / **А.Н. Антипин** // XVI Уральская молодёжная

научная школа по геофизике. Сборник научных материалов – Пермь: ГИ УрО РАН, 2015. – С. 10-14.

5. Хачай Ю.В. Численное моделирование распределения температуры на стадии аккумуляции Земли в 3D модели и особенности её первичной минерагении / Ю.В. Хачай, **А.Н. Антипин**, В.Н. Анфилогов // Уральский геофизический вестник. – 2014. – №1. – С. 81-85.

6. Хачай Ю.В. Результаты численного 3D моделирования распределения температуры в оболочках Луны в процессе её аккумуляции / Ю.В. Хачай, **А.Н. Антипин** // Мониторинг. Наука и технологии. – 2014. – № 1. – С. 28-32.

7. Khachay Y. Numerical Results of 3-D Modeling of Moon Accumulation / Y. Khachay, V. Anfilogov, **A. Antipin** // EGU General Assembly Conference Abstracts. – 2014. – Т. 16. – С. 1011.

8. Хачай Ю.В. Формирование Земли и особенности минерагении ранней коры / Ю.В. Хачай, В.Н. Анфилогов, **А.Н. Антипин** // Геология и полезные ископаемые четвертичных отложений. – Минск, 2014. – С. 39-40.

9. **Антипин А.Н.** Реализация трёхмерного алгоритма процесса аккумуляции Луны / **А.Н. Антипин** // XV Уральская молодёжная научная школа по геофизике. Сборник докладов – Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2014. – С. 14-16.

10. Хачай Ю.В. 3D-модель эволюции тепловых неоднородностей в ядре Земли на этапе её аккумуляции / Ю.В. Хачай, В.Н. Анфилогов, **А.Н. Антипин** // Седьмые научные чтения Ю.П. Булашевича. Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей. Материалы конференции – Екатеринбург, 2013. – С. 321-323.

11. **Антипин А.Н.** Учет адиабатического сжатия при формировании температуры Земли в одномерной модели её аккумуляции / **А.Н. Антипин** // XIV Уральская молодёжная научная школа по геофизике. Сборник научных материалов – Пермь: ГИ УрО РАН, 2013. – С. 10-14.

12. Хачай Ю.В. О влиянии первичной атмосферы на распределение температуры в Земле при её аккумуляции / Ю.В. Хачай, В.Н. Анфилогов, **А.Н. Антипин** // Уральский геофизический вестник. – 2012. – №2. – С. 54-59.

13. Khachay Y. About the Influence of the initial atmosphere on the Earth's temperature distribution during it's accumulation / Y. Khachay, V. Anfilogov, **A. Antipin** // EGU General Assembly Conference Abstracts. – 2012. – Т. 14. – С. 1275.

14. Хачай Ю.В. О возможном влиянии первичной атмосферы на распределение температуры в Земле при её аккумуляции / Ю.В. Хачай, В.Н. Анфилогов, **А.Н. Антипин** // Физика Космоса. Труды 41-й международной студенческой научной конференции – Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2012 – С. 177-185.

15. **Антипин А.Н.** Численное моделирование динамики слоя расплава во внутренних областях на стадии аккумуляции Земли / А.Н. Антипин // XIII Уральская молодёжная научная школа по геофизике. Сборник докладов – Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2012. – С. 7-9.