

C022

On Linear Inverse Gravimetric Problem Solution for Layered Media

P.S. Martyshko* (Institute of Geophysics Ural Branch of RAS) & D.E. Koksharov (Institute of Geophysics Ural Branch of RAS)

SUMMARY

Technology has been developed for constructing density distributions in curve-edged layers using gravity data. It is based on fundamental results in field theory and theory of ill-posed inverse problems. This method involves algorithm of gravity field sources separation. We tested this approach for model samples and used it for building density sections using practical data.

On linear inverse gravimetric problem solution for layered media
О решении линейной обратной задачи гравиметрии для слоистой среды

П.С. Мартышко, Д.Е. Кокшаров

Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
+7(343)2678868, pmart@igeoph.mplik.ru

Введение.

Разработка методов разделения источников гравитационного поля (зон аномальной плотности) по глубине является сложной проблемой как в математическом, так и в методическом смысле. С практической точки зрения представляет интерес задача выделения источников, локализованных в горизонтальном слое и определения их плотности. С математической точки зрения такая задача является некорректно поставленной [Лаврентьев М.М., 1962]. Для слоев с плоскими горизонтальными границами такие методики разработаны [Мартышко П.С., Пруткин И.Л., 2003, Новоселицкий В.М., Простолупов Г.В., 1999]. Цель настоящего исследования - разработать метод определения аномальной плотности в слоях с неплоскими границами, опробовать его на модельных примерах и применить для интерпретации практических данных.

Разделение источников.

Существенный вклад в гравитационное поле могут оказывать источники, залегающие вне исследуемого слоя. В частности, это источники, находящиеся вне изучаемой области в проекции на земную поверхность (боковые источники), а также источники, залегающие на глубинах меньше и больше рассматриваемой.

Напомним методику разделения источников поля по вертикали [Мартышко П.С., Пруткин И.Л., 2003] (предполагается, что выше исследуемого слоя нет источников, вытянутых в горизонтальном направлении). По формуле

$$U(x', y', H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2)^{3/2}} U(x, y, 0) dx dy. \quad (1)$$

поле U продолжается вверх на уровень H , при этом влияние локальных приповерхностных источников (до глубины H) если и не устраняется совсем, то значительно ослабевает. Чтобы окончательно избавиться от влияния источников в горизонтальном слое от дневной поверхности до глубины H , пересчитанное вверх поле затем продолжается вниз на глубину H с применением регуляризации при решении интегрального уравнения

$$U(x', y', H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2H}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + 4H^2)^{3/2}} U(x, y, -H) dx dy \quad (2).$$

Особенности найденной функции $U(x, y, -H)$ лежат глубже H , выше этого уровня она является гармонической, поэтому можно трактовать ее как поле глубинных источников. Сумма этого поля, пересчитанного на земную поверхность, и предварительно вычтенного решения задачи Дирихле используется как поле боковых и глубинных источников. Разность измеренных значений гравитационного поля и указанной выше суммы используется в качестве гравитационного эффекта от источников, лежащих в горизонтальном слое от земной поверхности до глубины H . Проведя описанную выше процедуру для двух значений H : $H_2 > H_1$, можем выделить гравитационный эффект от источников, залегающих в горизонтальном слое между H_2 и H_1 (как разность полей двух полупространств [Мартышко П.С., Пруткин И.Л., 2003]).

Как показывают эксперименты, искажения, связанные с процедурой решения обратной задачи, наиболее велики вблизи границы области (вследствие интегрирования

не по бесконечной плоскости, а по конечной части). С целью их уменьшения из измерений предварительно вычитаются значения функции $U(x,y)$, являющейся решением плоской двумерной задачи Дирихле (удовлетворяющей в исследуемой области двумерному уравнению Лапласа и принимающей на границе области те же значения, что и заданное поле)

$$\begin{aligned} \Delta U(x, y) &= 0 \\ U|_{\partial D} &= \Delta g_{\text{изм}} \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta g_{\text{изм}}$ – значение измеренного поля на границе изучаемой области. Такая функция использовалась в работах В.Н. Страхова [Страхов В.Н., Иванов С.Н., 1983] и И.Л. Пруткина [Пруткин И.Л., 1988] (при решении задачи о сглаживании измерений на площади) и вполне может использоваться в качестве поля боковых источников.

Методика решения обратной задачи о поиске распределения плотности в слое.

В работе [Мартышко П.С., Пруткин И.Л., 2003] приведено выражение гравитационного эффекта от горизонтального слоя переменной плотности $\sigma(x, y)$, залегающего между глубинами H_1 и H_2 , в виде двойного интеграла:

$$\begin{aligned} \Delta g(x', y', 0) = f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} & \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2^2}} \right) \sigma(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

f – гравитационная постоянная.

При решении обратной задачи требуется многократно решать прямую задачу, поэтому необходимо использовать эффективные алгоритмы вычисления интеграла в правой части (4). Разобьем двойной интеграл на сумму интегралов по элементарным прямоугольникам размера Δx на Δy . Это означает, что слой представляется разбитым на прямоугольные параллелепипеды $\Delta x \cdot \Delta y \cdot (H_2 - H_1)$, каждый из которых имеет постоянную плотность, и применить некоторую квадратурную формулу. При этом вычисление интеграла (4) сводится к умножению вектора плотности $\sigma(x,y)$ на матрицу интегрирования. Задача вычисления распределения плотностей, таким образом, сводится к решению регуляризованной СЛАУ $(A + \alpha E)x = u$

Преимущество такого подхода заключается в том, что матрица интегрирования вычисляется только один раз (перед началом процедуры вычисления плотности), и, следовательно, на каждой итерации для вычисления поля от текущего распределения плотностей необходимо лишь умножить матрицу на вектор. Решение системы снова осуществлялось методом наискорейшего спуска, однако скорость сходимости метода вычисления плотностей оказалось существенно ниже, чем при пересчете поля вниз. Как и при пересчете поля вниз, явное обращение матрицы дало результаты, очень близкие к результатам итерационного метода. Влияние параметра регуляризации на этапе вычисления плотности существенно ниже, чем на этапе пересчета поля вниз. Однако, как и в случае пересчета, увеличение параметра регуляризации ведет к некоторому «сглаживанию» картины плотностей (как это и следует из теории регуляризации).

Для случая слоя с криволинейными границами модель предполагает отсутствие аномалий плотности вне слоя (выше и ниже) с известными криволинейными границами $H_1 = H_1(x,y)$ и $H_2 = H_2(x,y)$, такими, что $H_1 > H_2 \forall (x,y)$, и выполняется

$$H_i(x, y) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow \pm\infty}]{\quad} h_i = \text{const},$$

при этом задается распределение плотностей $\sigma = \sigma(x,y)$ внутри слоя.

Тогда

$$\Delta g(x', y', 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1(x, y)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2(x, y)^2}} \right) \sigma(x, y) dx dy \quad (5).$$

Решение обратной задачи в этом случае производится следующим образом: интеграл в (5) разбивается по какой-нибудь формуле численного интегрирования в сумму (для регулярной сетки)

$$\Delta g(x'_m, y'_n, 0) \approx \sum_{i,j} \alpha_{ij} K_{ij} \sigma(x_i, y_j) \Delta x \Delta y,$$

где $\Delta g(x'_m, y'_n, 0)$ - известное значение поля на сетке, α_{ij} - веса формулы интегрирования,

$$K_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(x_i - x'_m)^2 + (y_j - y'_n)^2 + H_1(x_i, y_j)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x'_m)^2 + (y_j - y'_n)^2 + H_2(x_i, y_j)^2}}.$$

Полученную систему линейных уравнений $Ax = y$, (правая часть – известные значения $\Delta g(x'_m, y'_n, 0)$) регуляризируют по Лаврентьеву заменой матрицы A на $(A + \alpha E)$ и решают любым способом (авторы пользовались методом Гаусса с выбором ведущего элемента и методом наискорейшего спуска), находя $\sigma(x_i, y_j)$ на сетке.

Для реализации изложенных методик интерпретации данных гравиразведки была разработана компьютерная программа. Основной задачей при ее разработке являлась открытость всех этапов интерпретации и возможность вмешательства в работу любого из ее блоков, например, в процесс подбора параметров регуляризации. Другой задачей было представление обрабатываемых данных в наглядной форме. Трехмерные графики поля и плотности строятся с использованием библиотек OpenGL.

Методика была опробована на модельных примерах и, в дальнейшем, была применена для интерпретации практических данных гравиразведки. На рис. 1 приведены верхняя и нижняя границы слоя, а также плоскости, между которыми производилось выделение источников поля. На рис. 2 приведены изолинии исходного гравитационного поля в редукции Буге, на рис. 3 – вычисленное по приведенной методике поле от слоя, залегающего между глубинами 2.5-3.5 км. Затем в предположении, что значительные аномалии плотности внутри данного слоя и вне криволинейного слоя отсутствуют, было найдено распределение плотности в слое (рис. 4).

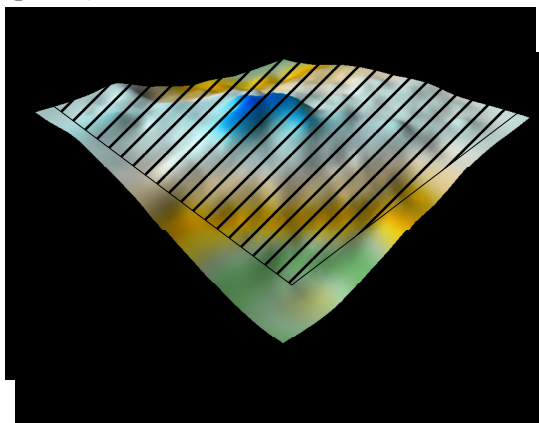


Рис. 1. Верхняя и нижняя границы слоя, заштрихованы плоскости, между которыми производилось выделение источников поля

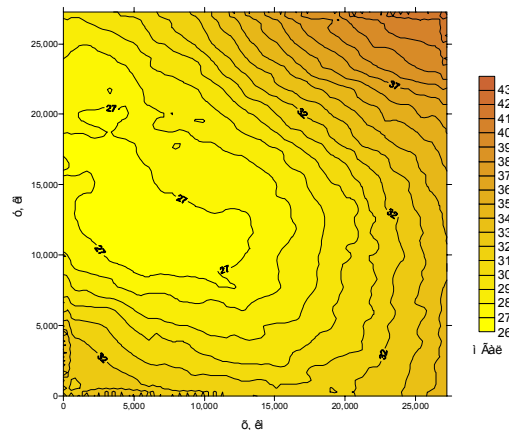


Рис. 2. Исходное поле в редукции Буге.

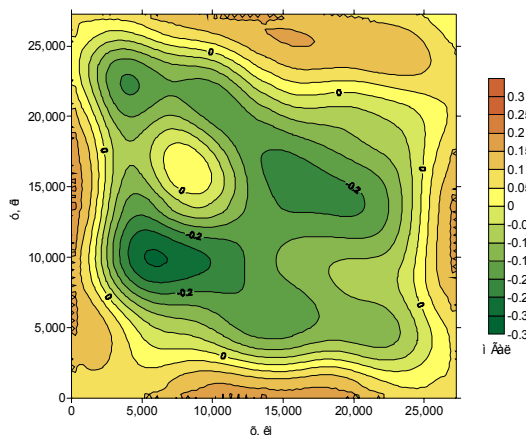


Рис. 3. Поле от слоя, залегающего между глубинами 2.5-3.5 км

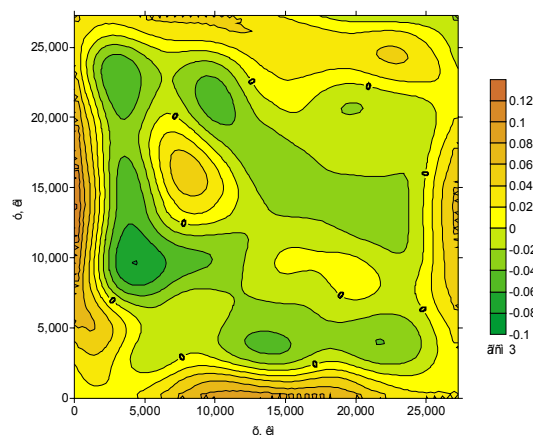


Рис. 4. Распределение избыточной плотности в слое

Заключение. Представлены новые алгоритмы решения обратной задачи о поиске распределения плотности в слое в случае криволинейных границ слоя. Они были реализованы в компьютерной системе интерпретации данных гравirazведки, основными преимуществами которой стали открытость всех этапов обработки данных (от загрузки исходной информации о поле до расчета результирующего распределения плотностей); визуальное представление обрабатываемых данных; интеграция всех этапов обработки в одном программном продукте. Авторы успешно опробовали методику на модельных примерах и реальных гравиметрических данных.

Список литературы

- Мартышко П.С., Пруткин И.Л. 2003. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине. // Геофизический журнал. Т.25. № 3, 2003. С. 159-168.
- Страхов В.Н., Иванов С.Н., 1984. Метод аналитического продолжения трехмерных потенциальных полей // Теория и практика геологической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Алма-Ата.
- Пруткин И.Л., 1988. О предварительной обработке измерений, заданных на площади // Методы интерпретации и моделирования геофизических полей. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 11-15.
- Лаврентьев М.М., 1962. О некоторых некорректных задачах математической физики // Новосибирск: СО АН СССР. 92 с.
- Новоселицкий В.М., Простолупов Г.В., 1999. Векторная обработка гравиметрических наблюдений с целью обнаружения и локализации источников аномалий.// Геофизика и математика: Материалы I Всеросс. конф. – М.: ОИФЗ РАН, 1999. С. 104-107.