

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ РАДОНА В ПОДЗЕМНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ

*Климишин А.В.* – Институт геофизики Уральского отделения РАН, Екатеринбург

**Аннотация.** Приведенная в данной работе математическая модель позволяет рассчитать уровень эквивалентной равновесной объемной активности радона в воздухе подземного помещения, зная удельную активность радия в грунтах, пористость, плотность грунтов, коэффициенты диффузии и эманации радона, кратность воздухообмена и габариты помещения. Модель может найти применение при оценке радоноопасности участков под строительство и проектировании вентиляционных систем в подземных сооружениях.

*Радон, математическая модель, диффузия.*

### MATHEMATICAL MODEL OF RADON ACCUMULATION IN UNDERGROUND MINES

*Klimshin A.V.* – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

**Abstract.** The mathematical model is developed in this paper to calculate the level of equivalent equilibrium volume activity of radon in the air of underground structures, if specific activity of radium in the soil, porosity, soil density, diffusion and emanation coefficients of radon, air exchange and the dimensions of the room are known. The model can be applied in assessing radon potential for construction and design of ventilation systems in underground structures.

*Radon, mathematical model, diffusion.*

#### **Введение**

Необходимость контроля уровня радона в воздухе подземных горных выработок возникает при строительстве и эксплуатации шахт, а также автомобильных и железнодорожных тоннелей, в том числе для метрополитенов. Расчет уровней радона в воздухе подземных помещений может выполняться для оценки потенциальной радоноопасности участка под строительство подземного сооружения.

Решению этой задачи посвящены работы (Радиационная ... , 1979; Павлов, Покровский, Камнев, 1994; Булашевич, 1975; Салтыков, Шалаев, Лебедев, 1984). В работе (Радиационная ... , 1979) приведены соотношения, связывающие значения объемной активности радона при различных скоростях проветривания. В работе (Павлов, Покровский, Камнев, 1994) приведена модель увеличения во времени величины скрытой энергии в вентиляционной струе равномерно эманлирующей выработки. Эти модели не позволяют учесть габариты помещения и свойства горных пород. В работе (Булашевич, 1975) приведена математическая модель, позволяющая рассчитать накопление радона в горной выработке в

отсутствии вентиляции. В работе (Салтыков, Шалаев, Лебедев, 1984) приводятся математические соотношения для расчета объемной активности радона в шахтном воздухе с учетом содержания урана (радия) в горных породах, их пористости и скорости движения воздуха в подземном помещении. Недостатком этой модели является то, что она не учитывает геометрические характеристики горной выработки.

Целью данной работы является создание математической модели накопления радона в подземных горных выработках, учитывающей размеры подземного помещения, кратность воздухообмена и способность грунтов выделять радон.

#### **Математическая модель**

Примем следующие допущения:

– будем предполагать, что помещение подземной горной выработки представляет собой цилиндр с длиной  $L$  и с площадью основания  $S_{\text{осн}}$  (рис. 1);

– за счет вентиляции через основание цилиндра I поступает атмосферный воздух с объемной активностью  $C_{\text{атм}}$ , создавая плотность конвективного потока радона  $\vec{j}_1$ ; через основание цилиндра II воздух с объ-

емной активностью  $C_{ind}$  выходит, создавая плотность конвективного потока радона  $j_2$ ;

– с боковой поверхности выработки в помещение поступает диффузионный поток радона  $j_3$ , источники которого (атомы Ra-226) распределены равномерно в горной породе;

– внутри помещения радон распределен равномерно за счет перемешивания воздуха.

Введем цилиндрическую систему координат. Ось OZ направим вдоль оси цилиндра от основания I к основанию II. Уравнение диффузии радона с источником имеет вид (Булашевич, Хайритдинов, 1959):

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} + \text{div } \vec{j} + \lambda \cdot C = 0, \quad (1)$$

где  $C$  – объемная активность радона, Бк/м<sup>3</sup>;  $\lambda$  – постоянная распада радона, равная  $2,1 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}$ ;  $\vec{j}$  – плотность потока радона, Бк/(м<sup>2</sup>·с), равная сумме конвективной и диффузионной составляющих

$$\vec{j} = C \cdot \vec{v} - D \cdot \vec{\nabla} C, \quad (2)$$

где  $\vec{v}$  – среднемассовая скорость движения воздуха, м/с;  $D$  – коэффициент диффузии радона, м<sup>2</sup>/с.

Проинтегрируем уравнение (1) по объему цилиндра  $V$ .

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_V C dV = -\frac{\lambda}{V} \cdot \int_V C dV - \frac{1}{V} \cdot \int_V \text{div } \vec{j} dV. \quad (3)$$

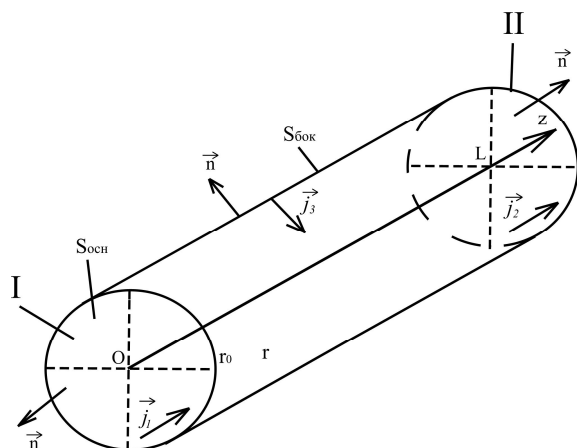


Рис. 1. Схематическое изображение подземной горной выработки

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \text{div } \vec{j} dV = \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS, \quad (4)$$

где  $\vec{n}$  – вектор нормали, внешней по отношению к выработке, тогда

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_{i\tilde{n}}} j_{1z} dS + \int_{S_{i\tilde{n}}} j_{2z} dS - \int_{S_{ai\tilde{e}}} j_{3r} dS. \quad (5)$$

В выражении (5)  $j_{1z}$  и  $j_{2z}$  – это нормальные к поверхности основания цилиндра составляющие плотности конвективного потока радона;  $j_{3r}$  – нормальная к боковой поверхности цилиндра составляющая плотности диффузионного потока радона. Введем среднюю по объему цилиндра  $V$  объемную активность радона  $C_{ind}$ . Данная величина совпадает со средней по поверхности основания II цилиндра объемной активностью радона

$$\tilde{N}_{ind} = \frac{1}{V} \cdot \int_V C dV = \frac{1}{S_{i\tilde{n}}} \cdot \int_{S_{i\tilde{n}}} C|_{z=L} dS.$$

Средняя по поверхности основания I цилиндра объемная активность радона равна

$$C_{atm} = \frac{1}{S_{ocn}} \cdot \int_{S_{ocn}} C|_{z=0} dS.$$

Средние по поверхностям основания цилиндра I и II скорости движения воздуха равны

$$\tilde{v} = \frac{\int_{S_{i\tilde{n}}} (Cv_z)|_{z=0} dS}{\int_{S_{i\tilde{n}}} C|_{z=0} dS} = \frac{\int_{S_{i\tilde{n}}} (Cv_z)|_{z=0} dS}{C_{atm} S_{i\tilde{n}}} \quad \text{и}$$

$$\tilde{v} = \frac{\int_{S_{i\tilde{n}}} (Cv_z)|_{z=L} dS}{\int_{S_{i\tilde{n}}} C|_{z=L} dS} = \frac{\int_{S_{i\tilde{n}}} (Cv_z)|_{z=L} dS}{C_{ind} S_{i\tilde{n}}}$$

Тогда средние по поверхностям основания цилиндра значения плотности потока радона равны:

$$\tilde{j}_1 = \frac{1}{S_{i\tilde{n}}} \cdot \int_{S_{i\tilde{n}}} j_{1z} dS = \frac{1}{S_{i\tilde{n}}} \int_{S_{i\tilde{n}}} (Cv_z)|_{z=0} dS = \tilde{v} \cdot C_{atm},$$

$$\tilde{j}_2 = \frac{1}{S_{i\tilde{n}}} \cdot \int_{S_{i\tilde{n}}} j_{2z} dS = \frac{1}{S_{i\tilde{n}}} \int_{S_{i\tilde{n}}} (Cv_z)|_{z=L} dS = \tilde{v} \cdot C_{ind}.$$

Среднее по боковой поверхности цилиндра значение плотности диффузионного потока радона равно  $\tilde{j}_3 = \frac{1}{S_{ai\tilde{e}}} \cdot \int_{S_{ai\tilde{e}}} j_{3z} dS.$

Тогда выражение (3) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \tilde{N}_{ind}}{\partial t} = -\lambda \cdot C_{ind} - \frac{\tilde{v} \cdot S_{ini}}{V} \cdot (C_{ind} - C_{atm}) + \frac{\tilde{j}_3 \cdot S_{aie}}{V}. \quad (6)$$

Выражение  $\frac{\tilde{v} \cdot S_{ini}}{V}$  показывает, какая часть воздуха в помещении обновляется за счет вентиляции в единицу времени. Ее принято называть (Postendorfen, Wicke, Schraub, 1978) кратностью воздухообмена. Обозначим ее  $\lambda_v$ .

Для того чтобы найти среднее значение плотности диффузионного потока радона с боковой поверхности цилиндра, входящее в выражение (6), решим уравнение диффузии радиоактивной эманации в пористой среде (Булашевич, Хайритдинов, 1959) в области  $r \in [r_0, \infty)$ . В цилиндрической системе координат оно имеет вид:

$$\eta \cdot \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial r} \right) - C_1 \cdot \lambda \cdot \eta + A_{Ra} \cdot K_{yi} \cdot \rho \cdot \lambda, \quad (7)$$

где  $C_1$  – объемная активность радона в пористой среде;  $\eta$  – пористость;  $A_{Ra}$  – удельная активность радия-226 в грунтах, Бк/кг;  $K_{эм}$  – коэффициент эманирования радона;  $\rho$  – плотность грунтов, кг/м<sup>3</sup>. Зависимостью объемной активности радона  $C_1$  от координаты  $z$  пренебрегли, так как предполагается, что удельная активность радия в грунтах, их плотность и пористость, коэффициенты эманирования и диффузии радона распределены равномерно в горных породах, а в помещении радон распределен равномерно.

Система уравнений (6–7) с начальными и граничными условиями  $\tilde{N}|_{t=0} = C(r)$ ,

$$C_{ind}|_{t=0} = C_{ind0}, \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial r}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad C_1|_{r=r_0} = C_{ind},$$

$$\frac{\partial C}{\partial r}|_{r \rightarrow r_0} = \frac{\partial C_1}{\partial r}|_{r \rightarrow r_0}$$

представляют собой мате-

матическую модель накопления радона в подземных горных выработках.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (7) с указанными выше граничными условиями. Оно имеет место при  $t \gg \lambda^{-1}$ .

$$\tilde{N}_1 = C_{ind} \cdot \frac{K_0(r/l)}{K_0(r_0/l)} + \tilde{N}_\infty \cdot \left[ 1 - \frac{K_0(r/l)}{K_0(r_0/l)} \right]. \quad (8)$$

В выражении (8) использованы следующие обозначения:

$K_\nu(u)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода или функция Макдональда (Никифоров, Уваров, 1984),  $\nu = (0, 1)$

$l = \sqrt{D/\lambda} \cdot \eta$  – диффузионная длина радона в

грунтах (м),  $\tilde{N}_\infty = \frac{A_{Ra} \cdot K_{yi} \cdot \rho}{\eta}$  – равновесная объемная активность радона в воздухе грунтов, Бк/м<sup>3</sup>. По закону Фика плотность потока радона с боковой поверхности горной выработки равна:

$$\tilde{j}_3 = D \cdot \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{K_1(r_0/l)}{K_0(r_0/l)} \cdot \frac{D}{l} \cdot (C_\infty - C_{ind}). \quad (9)$$

С учетом выражения (9), стационарное решение уравнения (7) можно записать в виде:

$$\tilde{N}_{ind} = \frac{2 \cdot r_0 \cdot \lambda_v \cdot C_{atm} \cdot l \cdot K_0(r_0/l) + D \cdot K_1(r_0/l) \cdot \tilde{N}_\infty}{2 \cdot (\lambda + \lambda_v) \cdot r_0 \cdot l \cdot K_0(r_0/l) + D \cdot K_1(r_0/l)}. \quad (10)$$

При оценке дозовой нагрузки от радона и его дочерних продуктов распада принято нормировать и контролировать эквивалентную равновесную объемную активность (ЭРОА) радона. ЭРОА неравновесной смеси дочерних продуктов распада радона в воздухе – это такая объемная активность радона в полном равновесии с дочерними продуктами распада, которая имеет такую же величину скрытой энергии (то есть энергии альфа излучения, выделяемой при распаде всех короткоживущих дочерних продуктов распада радона в единице объема воздуха), как данная неравновесная смесь (Защита ... , 1995). Взаимосвязь между объемной активностью радона в помещении и ЭРОА устанавливается соотношением:

$$\tilde{N}_{ind} \cdot F = C_{ind}. \quad (11)$$

Коэффициент  $F$  характеризует сдвиг равновесия между радонам и его дочерними продуктами. В тех случаях, когда его значение неизвестно, используют значение  $F = 0,5$ , которое почти наверняка дает оценку верхней границы диапазона возможных значений ЭРОА радона в горных выработках (Радиационная ... , 1988).

С учетом выражений (10) и (11) формула для расчета ЭРОА радона в подземных горных выработках имеет вид:

$$\hat{A} = \frac{2 \cdot r_0 \cdot \lambda_v \cdot C_{atm} \cdot l \cdot K_0(r_0/l) + D \cdot K_1(r_0/l) \cdot \tilde{N}_\infty}{4 \cdot (\lambda + \lambda_v) \cdot r_0 \cdot l \cdot K_0(r_0/l) + 2 \cdot D \cdot K_1(r_0/l)} \quad (12)$$

Запишем выражение для расчета минимальной кратности воздухообмена, обеспечивающей безопасный (заданный) уровень ЭРОА в помещении подземной горной выработки.

$$\lambda_v = \frac{D \cdot (2 \cdot C_\infty - \text{ЭРОА}) \cdot K_1(r_0/l)}{2 \cdot r_0 \cdot l \cdot K_0(r_0/l) \cdot (\text{ЭРОА} - 2 \cdot C_{atm})} - \frac{\text{ЭРОА} \cdot \lambda}{\text{ЭРОА} - 2 \cdot C_{atm}} \quad (13)$$

Приведем расчет ожидаемых уровней ЭРОА радона в подземном тоннеле радиусом  $r_0 = 3$  м, что приблизительно соответствует размеру тоннеля метрополитена. Рассмотрим три значения кратности воздухообмена: 1)  $\lambda_{v1} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  – нормативная кратность воздухообмена для метрополитенов, в соответствии со СНиП 32-02-2003, п. 5.8.4; 2)  $\lambda_{v2} = 0,5 \cdot \lambda_{v1} \text{ с}^{-1}$ ; 3)  $\lambda_{v3} = 0 \text{ с}^{-1}$  – отсутствие вентиляции. В качестве грунтов рассмотрим граниты со следующими характеристиками: плотность  $\rho = 2600 \text{ кг/м}^3$ ; пористость  $\eta = 0,15$ ; коэффициент эманирования  $K_{эм} = 0,1$ ; коэффициент диффузии радона  $D = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ . Объемная активность радона в атмосферном воздухе принята равной  $C_{atm} = 10 \text{ Бк/м}^3$ .

Результаты расчета приведены на рис. 2.

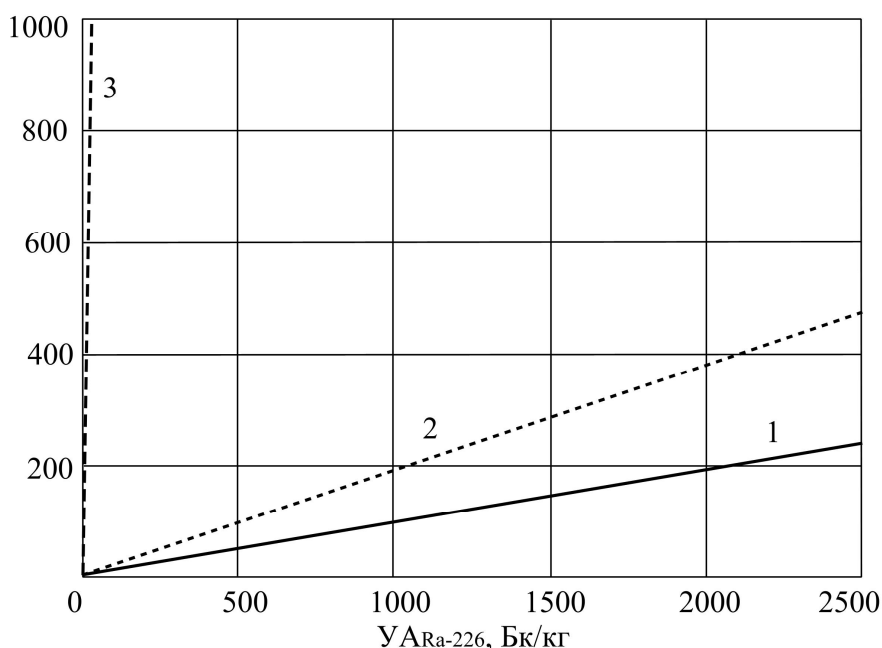
По результатам расчета, безопасный уровень ЭРОА радона – не более  $200 \text{ Бк/м}^3$  (норматив указан в СанПиН 2.6.1.2523-09, п. 5.3.3) будет обеспечен при нормативной кратности воздухообмена, если удельная активность радия-226 в грунтах не превысит  $2070 \text{ Бк/кг}$ . При снижении кратности воздухообмена в два раза, безопасный уровень ЭРОА следует ожидать при  $U_{\text{Ra-226}} \leq 1035 \text{ Бк/кг}$ . В условиях отсутствия вентиляции, превышение норматива по ЭРОА наступит, если  $U_{\text{Ra-226}} > 5 \text{ Бк/кг}$ .

### Заключение

Предложенная математическая модель позволяет дать прогноз ожидаемых уровней ЭРОА радона в будущих подземных помещениях по известным свойствам грунтов, проектным характеристикам работы вентиляционной системы и габаритам помещения. Кроме того, модель позволяет рассчитать минимальное значение кратности воздухообмена, необходимое для обеспечения безопасных уровней радона.

Эта модель может быть использована при оценке радоноопасности участков для строительства подземных сооружений, а также при проектировании вентиляционных систем в горных выработках.

ЭРОА, Бк/м<sup>3</sup>



**Рис. 2.** Теоретический расчет ЭРОА радона в воздухе подземного помещения в зависимости от удельной активности радия-226 ( $U_{\text{Ra-226}}$ ) при различных значениях кратности воздухообмена: 1 –  $\lambda_{v1} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ; 2 –  $\lambda_{v2} = 0,5 \cdot \lambda_{v1} \text{ с}^{-1}$ ; 3 –  $\lambda_{v3} = 0 \text{ с}^{-1}$

**Литература**

*Булашевич Ю.П.* Некоторые нестационарные задачи диффузии частиц с ограниченным временем жизни // Ядерно-геофизические исследования. Сб. статей. Свердловск, 1975. С. 3–15.

*Булашевич Ю.П., Хайритдинов Р.К.* К теории диффузии эманации в пористых средах // Изв. АН СССР, сер. геоф. 1959. № 12. С. 1787–1792.

Защита от радона-222 в жилых зданиях и на рабочих местах. Публикация 65 МКРЗ / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1995. 68 с.

*Никифоров А. Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1984. 344 с.

*Павлов И.В., Покровский С., Камнев Е.Н.* Способы обеспечения радиационной безопасности при разведке и добыче урановых

руд. М.: Энергоатомиздат, 1994. 256 с.

Радиационная защита на урановых и других рудниках. Рекомендации МКРЗ №24 / Под ред. и с комментариями А.А. Моисеева и И.Л. Шалаева; Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1979. 76 с.

Радиационная защита работающих в рудниках: Публикация 47 МКРЗ / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1988. 40 с.

*Салтыков Л.Д., Шалаев И.Л., Лебедев Ю.А.* Радиационная безопасность при разведке и добыче урановых руд. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1984. 144 с.

*Postendorfer J., Wicke A., Schraub A.* The influence of exhalation, ventilation and deposition processes upon the concentration of radon ( $^{222}\text{Rn}$ ) and thoron ( $^{220}\text{Rn}$ ) and their decay products in room air // Health Phys. 1978. V. 34, N 5. P. 465–473.