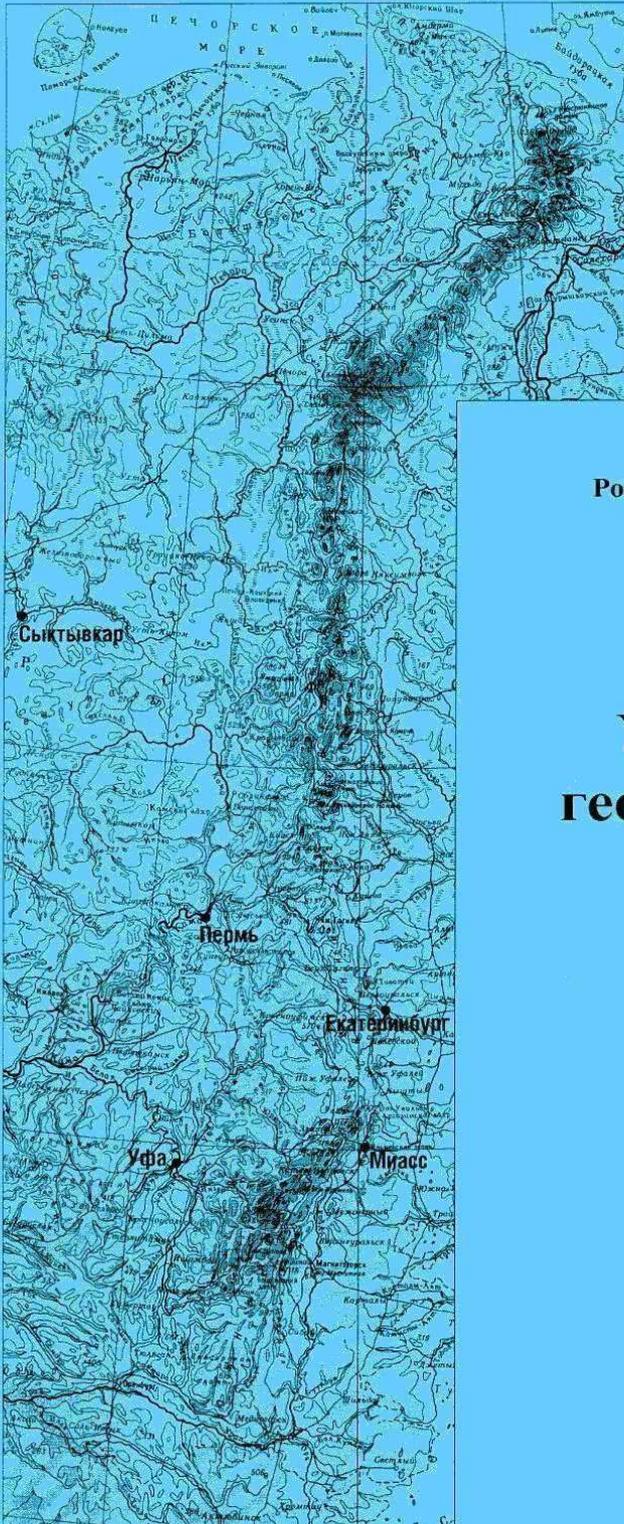


ISSN 1991-0223



Российская академия наук  
Уральское отделение

Институт геофизики

**Уральский  
геофизический  
вестник**

**№ 1  
2013**

Екатеринбург  
2013

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ГЕОФИЗИКИ  
им. Ю.П. БУЛАШЕВИЧА**

**УРАЛЬСКИЙ  
ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ  
ВЕСТНИК  
№ 1 (21) Юбилейный выпуск**

Основан в 2000 г.  
Выходит 2 раза в год  
ISSN 1991– 0223

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

*Главный редактор*

Уткин В.И. (voutkin@rambler.ru)

*Заместитель главного редактора*

Бахтерев В.В. (ugv@bk.ru)

*Ответственный секретарь*

Аревкова Э.О.

Члены редколлегии:

Глухих И.И.

Демежко Д.Ю.

Дружинин В.С.

Мартышко П.С.

Хачай Ю.В.

Хуторской М.Д.

Человечков А.И.

Шаров Н.В.

Шестаков А.Ф.

Эпов М.И.

**Институт геофизики УрО РАН  
Ул. Амундсена, 100  
20016, г. Екатеринбург, Россия  
Тел. (343) 267 88 68/267 88 88  
Факс. (343)267 88 72  
E-mail: mpsdir@mail.ru**

Екатеринбург, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Мартышко П.С., Шестаков А.Ф.</b> Георгий Митрофанович Воскобойников – основатель Уральской школы математической геофизики.....	5	<b>Хачай О.А.</b> Об интерпретации данных электромагнитных зондирований в постановке Г.М. Воскобойникова.....	40
<b>Хачай О.А.</b> Георгий Митрофанович Воскобойников – Народный консультант.....	10	<b>Хачай Ю.В.</b> О возможности МГД-генерации геомагнитного поля на стадии аккумуляции Земли.....	49
<b>Уткин В.И.</b> Учитель и человек.....	11	<b>Шестаков А.Ф.</b> О концепции особых точек аналитического продолжения геофизических полей и развитии методов их определения с использованием гасящих функции.....	55
<b>Бахтерев В.В.</b> Некоторые проблемы гамма-спектрокопии в исследованиях Г.М. Воскобойникова.....	18		
<b>Федорова Н.В.</b> Об интегральных характеристиках аномальных масс в структурных задачах гравиметрии и магнитометрии.....	31		

---

---

### **Вниманию читателей!**

Необходимые номера журнала можно заказать по адресу редакции:  
620016, Екатеринбург, ул. Амундсена, 100. Институт геофизики УрО РАН.  
Тел. (343)2678868/2678889, факс (343)2678872, E-mail: uralgeoph@mail.ru

**CONTENTS**

<b><i>Martyshko P.S., Shestakov A.F.</i></b> Georgiy M. Voskoboynikov – founder of the Ural school mathematical geophysics.. 5	<b><i>Hachay O.A.</i></b> About electromagnetic soundings interpretation after Voskoboynikov's statement..... 40
<b><i>Hachay O.A.</i></b> Georgiy M.Voskoboynikov – International consultants..... 10	<b><i>Khachay Yu.V</i></b> About the possibility of the MHD-generation geomagnetic field on the stage of Earth's accumulation..... 49
<b><i>Outkin V.I.</i></b> The teacher and the person..... 11	<b><i>Shestakov A.F.</i></b> On the concept of singular points of analytical continuation geophysical fields and development methods of their determination with use of extinguishing functions... 55
<b><i>Bakhterev V.V.</i></b> Some problem of gamma-spectrometry in researches of Georgiy M. Voskoboynirov... 18	
<b><i>Fedorova N.V.</i></b> Integral characteristics of abnormal masses in the structural problems of gravimetry and magnetometry..... 31	

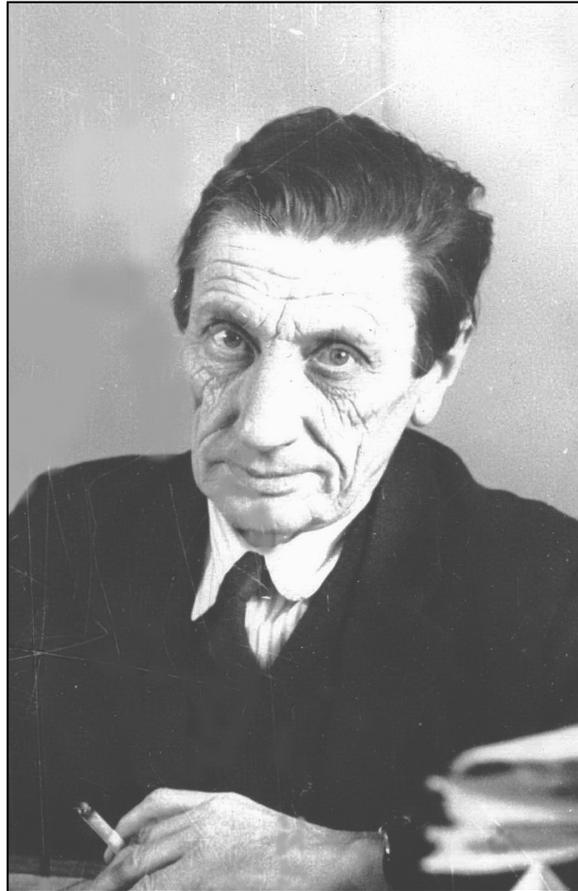
---

***To attention of readers!***

Necessary numbers of magazine can be ordered to the address:  
620016, Yekaterinburg, Amundsen str., 100. Institute of Geophysics UB of RAS.  
Ph. (343) 2678868/2678889, a fax (343)2678872, E-mail: uralgeoph@mail.ru

**К 100-ЛЕТИЮ** ТАЛАНТЛИВОГО УЧЕНОГО-ГЕОФИЗИКА, ЭНТУЗИАСТА НАУКИ,  
ОСНОВАТЕЛЯ УРАЛЬСКОЙ ШКОЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ

**ГЕОРГИЯ МИТРОФАНОВИЧА ВОСКОБОЙНИКОВА**



26 января 1913–31 августа 1990 года

Настоящий выпуск – юбилейный; он посвящен Ученому и Учителю, человеку с большой буквы, автору ряда фундаментальных исследований в области ядерной геофизики и теории интерпретации геофизических полей.

Георгий Митрофанович щедро делился своими знаниями. Многие его ученики стали докторами наук, и наш сборник сформирован статьями сотрудников Института геофизики, которые в течение всей своей научной жизни являются продолжателями дела Георгия Митрофановича.

Редакция журнала

## **ГЕОРГИЙ МИТРОФАНОВИЧ ВОСКОБОЙНИКОВ – ОСНОВАТЕЛЬ УРАЛЬСКОЙ ШКОЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ**

Георгий Митрофанович Воскобойников родился 26 января 1913 г. в Томске в семье служащего.

В 1929 г. он закончил среднюю школу в Нижнем Тагиле, затем (1930) работал на производстве треста «Востокруда».

В 1931 г. поступил на физико-математический факультет Свердловского госуниверситета, окончив его в 1937 г. С 1937 по 1939 гг. Г.М. Воскобойников работал ассистентом Уральского госуниверситета и Свердловского горного института.

В 1941 г. после окончания аспирантуры при Уральском госуниверситете он был командирован для производства геофизических измерений в Гидрографическое управление Главсевморпути. В годы Отечественной войны Георгий Митрофанович продолжал работу в арктических экспедициях, находясь на военном положении, и был награжден медалями «За оборону Советского Заполярья», «За победу над Германией», значком «Почетный полярник». За этот период времени и до 1951 г. Г.М. Воскобойников прошел путь от астронома-геодезиста, начальника астрономической партии до начальника производственного отдела и руководителя вычислительного бюро различных экспедиций и баз Главсевморпути.

В 1951 г. по окончании экспедиционных работ, Георгий Митрофанович перешел на работу в геофизический сектор Горно-геологического института УФАН СССР, а затем в организованный на базе сектора – Институт геофизики, где прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего лабораторией математической геофизики.

Основное направление исследований Г.М. Воскобойникова до 1961 г. связано с разработкой теоретических вопросов геофизической радиометрии и на их основе – разработкой новых методов полевых геофизических (радиометрических) измерений с целью определения вещественного состава горных пород, поиска и разведки

месторождений как радиоактивных, так и не радиоактивных полезных ископаемых.

Кандидатская диссертация Георгия Митрофановича посвящена радиометрическому направлению. Работа (1953-1954 гг.) создавалась в условиях, когда в теории радиометрии было много неясностей: неизвестна зависимость регистрируемой интенсивности гамма-излучения естественных излучателей от состава горных пород и типа индикатора; многими недооценивалась роль рассеянного гамма-излучения в формировании наблюдаемого эффекта; дискутировалась возможность раздельного определения содержания гамма-излучателей рядов урана и тория в горных породах и т.п., что являлось главным препятствием к правильному применению количественных методов разведочной радиометрии. Исследование Г.М. Воскобойниковым этих вопросов и зависимостей в диссертации и последующих работах фактически сдвинуло геофизическую радиометрию с эмпирических позиций и привело ее на новый качественный уровень.

Работы этого направления образуют замкнутый цикл, содержащий 12 статей, естественно объединяемых под общим названием «теория и методы применения гамма-лучей в геофизической разведке». Первая серия этого цикла [7, 8, 10, 12, 16] включает следующие важнейшие результаты, способствующие становлению геофизической радиометрии на новом уровне:

а) разработка метода массового расчета спектрального состава и интенсивности гамма-излучения в однородной среде [7];

б) расчет количественной зависимости между интенсивностью гамма-излучения, регистрируемого конкретным индикатором, и составом естественно-радиоактивной среды (руды радиоактивных элементов) [8];

в) расчет оптимального режима измерений и коэффициента разделения излучателей рядов урана и тория при раздельном определении их содержания в комплекс-

ных рудах с помощью сцинтилляционного счетчика гамма-квантов [10];

г) распространение основного соотношения гамма-каротажа («теоремы о площади») на случай среды переменной плотности [12].

Эти результаты определили направление обширной серии экспериментальных исследований других авторов и составили основу для разработки стандартной системы исходных параметров и требований к аппаратуре для количественной гамма-разведки.

Вторая серия работ [4, 5, 6, 9, 11, 14, 15, 21] посвящена теоретической и экспериментальной разработке физических основ и методов применения гамма-излучения к задачам поиска и разведки нерadioактивных полезных ископаемых. В основополагающей работе [6] Г.М. Воскобойниковым был развит формальный аппарат диффузионного приближения применительно к решению задач о распространении мягкого гамма-излучения в рассеивающе-поглощающих средах и предложен метод селективного гамма-гамма каротажа для обнаружения и количественного исследования рудных зон в буровых скважинах на месторождениях элементов высокого атомного номера.

Результаты экспериментальной проверки [11] теоретических исследований в совокупности с решением аппаратурных и методических вопросов [9] доказали бесспорное преимущество и эффективность практического применения селективного метода по сравнению с ранее применявшимися и предопределили его широкое производственное использование [15].

Наряду с рудным (селективным) вариантом Г.М. Воскобойниковым были решены также главные методические и аппаратурные вопросы применения гамма-гамма каротажа на угольных месторождениях с целью выделения угольных пластов [4, 5].

Дальнейшее развитие метода выполнено совместно с В.И. Уткиным и Ю.Б. Бурдиным и отражено в работе [14], где изложены результаты аппаратурной и методической разработки спектральной модифи-

кации селективного каротажа, что сильно расширило возможности практического использования метода и послужило причиной его повсеместного использования в последующие годы.

В 1961 г. в Институте геофизики (впервые в СССР, а вероятно, и первая в мире) была создана лаборатория математической геофизики и Г.М. Воскобойников стал ее заведующим. В этот период формируются научные направления исследований лаборатории, одно из которых связано с проблемой решения обратных задач теории потенциала и разработкой математических методов интерпретации аномалий.

Первые работы Георгия Митрофановича в этом направлении посвящены исследованию возможностей применения функции Карлемана для локализации источников потенциального поля по исходным данным, заданным на ограниченной части профиля или поверхности наблюдений. Поскольку эта задача представляла собой особую важность для геофизических исследований и относилась к категории некорректных задач математической геофизики, то разработка устойчивых методов ее решения была крайне актуальной.

В это же время начала активно развиваться теория решения некорректных задач, математические основы которой были заложены трудами А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, и Г.М. Воскобойников теоретически развил один из подходов к решению обратных задач теории потенциала, имеющих геофизические приложения [17, 19, 20].

Использование формализма функции Карлемана (обладающей «гасящими» свойствами) позволило Г.М. Воскобойникову получить ряд интересных с практической точки зрения результатов. Одним из них является устойчивое решение задачи локализации наименьшей (в некотором классе) области особенностей двумерного потенциального поля, ближайшей к поверхности Земли. Другим – решение задачи об определении гармонических моментов (массы, координаты центра тяжести и высших моментов) локальных источников потенциала

на фоне региональных потенциальных полей. В этих же работах рассмотрен и другой подход к проблеме локализации особенностей поля, основанный на прямом вычислении координат особых точек и определении их параметров, которые несут информацию о местоположении и характеристиках аномалиеобразующего объекта. Эти результаты явились дальнейшим развитием методов применения функций комплексного переменного к решению обратной задачи теории потенциала и составили основу для разработки метода гасящих функций, ранее известного только как аппарата аналитического продолжения функций в заданной области их регулярности.

В 1967 г. Г.М. Воскобойников защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук и стал еще более востребованным идейным вдохновителем при решении многих задач не только у сотрудников лаборатории математической геофизики, но и коллег всего Института.

Продолжая развивать направление исследований в области решения обратных задач теории потенциала с использованием формализма гасящих функций, Георгий Митрофанович становится основоположником метода особых точек, который стал разрабатываться в лаборатории под его руководством первоначально для потенциальных полей.

Проведение совместных с Н.И. Начапкинским исследований по применению двумерной гасящей функции конкретного вида в качестве ядра интегральных преобразований элементов поля привело к разработке метода особых точек для интерпретации потенциальных полей [22], основу которого составил устойчивый регуляризирующий алгоритм решения задачи по локализации особенностей гравитационного и магнитного полей. Установлена взаимосвязь между наиболее типичными классами форм аномалиеобразующих объектов и параметрами ближайших особых точек, им соответствующих; разработана и программно реализована вычислительная схема алгоритма, позволяющего определять важнейшие числовые характеристики осо-

бых точек: комплексную координату в вертикальной плоскости, тип и мощность. При этом вопрос о пространственной локализации особых точек окончательно решался с учетом дополнительного определения их параметров при различных положениях профиля наблюдений.

В дальнейшем этот вариант метода особых точек был опробован на большом количестве теоретических, модельных и практических примеров и положительно зарекомендовал себя при интерпретации сложных квазидвумерных аномалий [24, 25 и др.].

Достаточно высокая эффективность, но вместе с тем некоторые ограничения области применения двумерного варианта метода (связанные с решением задачи в двумерной постановке), обусловили необходимость разработки трехмерного подхода к определению особых точек для потенциальных полей, а также распространения его на геофизические поля иной природы – волновые электромагнитные и сейсмические.

Последующее развитие этого направления, возглавляемого Г.М. Воскобойниковым, привело к разработке прямого метода для локализации особенностей трехмерных потенциальных и волновых геофизических полей, описываемых дифференциальными уравнениями Лапласа, Гельмгольца и Ламе (для гармонического режима), основанного на едином методическом подходе – использовании интегральных преобразований элементов исследуемого поля с ядром из гасящих функций [26, 27 и др.]. Сконструированы трехмерные гасящие функции конкретного вида, допускающего эффективное их использование для определения параметров особенностей вышеуказанных полей; определено множество корректности решений рассматриваемой некорректной задачи и предложен способ ее регуляризации; разработаны эффективные алгоритмы для пространственной локализации особых точек и определении их параметров по исходным данным, заданным с некоторой погрешностью, успешно опробованные в дальнейшем на ряде модельных и практических примеров [28 и др.].

Г.М. Воскобойников – основатель Уральской школы математической геофизики. Одним из первых ее «выпускников» стал А.В. Цирульский, внесший в дальнейшем свой неопределимый вклад в математическую теорию интерпретации геофизических полей.

Эту школу прошли впоследствии не только сотрудники лаборатории математической геофизики (и прикрепленные к ней аспиранты и соискатели) – П.С. Мартышко, Ю.М. Гуревич, Н.И. Начапкин, Ф.И. Никонова, О.А. Хачай, Н.В. Федорова, И.Л. Пруткин, В.Б. Сурнев, А.Ф. Шестаков, – но и другие сотрудники института, с которыми Георгий Митрофанович щедро делился своими знаниями и опытом. Георгий Митрофанович был очень демократичным заведующим – признавал за коллегами право выбора научного направления, свободную конкуренцию, на равных принимал участие в обсуждении результатов, но и требовал, чтобы эти результаты были. В лаборатории оставались только сотрудники, подтвердившие свою способность работать на высоком уровне; почти все из них стали докторами наук, занимают ведущие позиции в Институте. Умел Георгий Митрофанович правильно отбирать и воспитывать кадры!

Рассматривая научную печатную продукцию как законченное (или почти законченное) исследование, Г.М. Воскобойников всегда относился критически к работам, выходящим не только из недр лаборатории, но также и к тем, что «попадались» ему на глаза. В частности, в ряде работ [2, 3, 13, 18] им выполнен критический разбор и показана несостоятельность некоторых ошибочных теоретических выводов и рекомендаций, проникших в научную и учебную литературу в области гравиметрии, магнитометрии и радиометрии.

В последующие годы, уже в пенсионном возрасте, Георгий Митрофанович продолжал активно работать в качестве научного консультанта, способствуя становлению многих идей и концепций у своих коллег и учеников, формированию у них

научного мировоззрения и до конца своей жизни (31 августа 1990 г.) оставался преданным геофизике, требовательным к себе и окружающим в отношении уровня научных исследований.

**Список основных научных работ  
Г.М. Воскобойникова**

1. Об исключении влияния уклонения отвеса при наблюдении азимутов на пунктах геодезических сетей // Сборник Севморпути. 1945. XVII.
2. К вопросу о практической применимости метода Б.А. Андреева для определения глубины залегания источников потенциальных полей // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1954. № 1. С. 97–99.
3. К вопросу об определении намагниченности возмущающих тел по данным магниторазведки // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1955. № 5. С. 483–485.
4. Плотностной каротаж углеразведочных скважин // Разведка и охрана недр. 1956. № 10. С. 38–46. (Совместно с Л.Л. Деевым).
5. Гамма-гамма каротаж на угольных месторождениях Урала и возможность бескернового бурения части разведочных скважин // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1957. № 1. С. 109–112. (Совместно с Ю.П. Булашевичем).
6. Теоретические основы селективного гамма-гамма-каротажа // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1957. № 3. С. 351–362.
7. Интегральные уравнения и приближенные формулы для расчета интенсивности гамма-излучения в однородной излучающей среде // Тр. Горно-геологического института УФАН СССР. Свердловск, 1957. Вып. 30. С. 152–161.
8. Интенсивность гамма-излучения в однородной излучающей среде // Там же. С. 162–172.
9. Некоторые результаты экспериментальной проверки возможности практического применения селективного каротажа // Атомная энергия. 1958. Т. 4. Вып. 4. С. 359–364.
10. К вопросу о спектрометрических исследованиях гамма-излучения естественных излучателей // Атомная энергия. 1959. Т. 6. Вып. 1. С. 42–48.

11. К вопросу о точности и границах применимости диффузионного приближения решения задач о распространении гамма-лучей // ЖТФ. 1960. Т. XXX. Вып. 1. С. 90–95.

12. К теории интерпретации данных гамма-каротажа в слоистых средах // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1960. № 2. С. 263–270.

13. О некоторых вопросах радиометрических методов разведки // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1961. № 1. С. 114–119.

14. Спектральные методы определения природы аномалий селективного каротажа // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1961. № 8. С. 1141–1149. (Совместно с В. И. Уткиным, Ю.Б. Бурдиным).

15. К вопросу о количественных определениях содержания тяжелых металлов в руде по данным селективного каротажа // Тр. Института геофизики УФАН СССР. Свердловск, 1962. Вып. 2. С. 47–55. (Совместно с В.Н. Балашевым, П.А. Главчевым).

16. Спектр гамма-излучения монохроматического источника в однородной рассеивающей среде (численные данные) // Тр. Института геофизики УФАН СССР. Свердловск, 1962. Вып. 3. С. 3–5.

17. Функция Карлемана и ее применение к решению некоторых задач геофизики // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1962. № 11. С. 1579–1590.

18. О некоторых теоретических вопросах гравиметрии в работах А.К.Маловичко и его сотрудников // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1964. № 11. С. 1702–1707. (Совместно с А.В. Цирульским, М.И. Сиротинным).

19. Интегральные преобразования и расположение особенностей логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1965. № 1. С. 76–89.

20. Об определении особенностей аналитического продолжения потенциальных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1965. № 12. С. 21–30. (Совместно с М. И. Сиротинным).

21. Каротажный снаряд с автономно перемещающимся выносным блоком // Тр. Института геофизики УФАН СССР. Свердловск, 1965. Вып. 3. С. 207–211.

22. Метод особых точек для интерпретации потенциальных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969. № 5. (Совместно с Н.И. Начапкинским).

23. О вычислении стационарных электромагнитных полей в некоторых кусочно-однородных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1973. № 9. С. 63–75.

24. Теоретические предпосылки и опыт применения метода особых точек к интерпретации сложных магнитных аномалий // Теория и практика применения аналитических методов интерпретации и математического моделирования геофизических полей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С.3-21. (Совместно с Н.И. Начапкинским).

25. Методические рекомендации по применению метода особых точек для интерпретации потенциальных полей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. 130 с. (Совместно с Н.И. Начапкинским).

26. Метод гасящих функций и его применение для определения особых точек геофизических полей, удовлетворяющих трехмерным уравнениям Лапласа и Гельмгольца // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 3. С. 62–75. (Совместно с А.Ф. Шестаковым).

27. О методе особых точек применительно к интерпретации сейсмических данных // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 3. С. 35–40. (Совместно с А.Ф. Шестаковым).

28. Метод особых точек для интерпретации геофизических полей, удовлетворяющих трехмерным уравнениям Лапласа и Гельмгольца // Алгоритмы, методика и результаты интерпретации геофизических данных. Киев: Наукова думка, 1985. С. 109–112. (Совместно с А.Ф. Шестаковым).

Директор Института геофизики,  
член-корреспондент РАН  
Мартышко П.С.  
Заведующий лабораторией,  
доктор физико-математических наук  
Шестаков А.Ф.

## ГЕОРГИЙ МИТРОФАНОВИЧ ВОСКОБОЙНИКОВ-НАРОДНЫЙ КОНСУЛЬТАНТ



26 января 2013 года мы отмечаем столетие со дня рождения ученого, учителя, Человека с большой буквы, сыгравшего большую роль в становлении и развитии нашего Института, в развитии нового направления – математической геофизики Георгия Митрофановича Воскобойникова. В сердцах многих сотрудников нашего Института он живой, и его имя находит отклик в душе, который помогает в повседневной жизни справляться с трудностями и прокладывать путь к новым знаниям.

Научное влияние Георгия Митрофановича далеко не ограничивалось его учениками. Он был глубоко демократичен в научной жизни (как, впрочем, и в жизни вообще). За советом и критикой, которые были всегда четки и ясны, к нему мог обратиться каждый, вне зависимости от своих научных заслуг и званий. При одном лишь условии – речь должна идти о настоящем деле, а не о том, чего он больше всего не любил в науке, – пустом умствования, прикрытом наукообразными сложностями бессодержательности и безрезультатности. Его ум был остро критичен, это свойство вместе с глубоко физическим подходом к вопросам делало дискуссии с ним столь привлекательными и полезными. В дискуссиях он бывал горяч и резок, но не груб; остроумен и ироничен, но не едок. С годами его характер менялся, но энтузиазм в науке, бескомпромиссная научная принципиальность оставались неизменными. За его внешней резкостью всегда скрывалась научная беспристрастность, большое человеческое сердце и человеческая доброта. Насколько резкой и беспощадной была его критика, настолько же искренно было его желание содействовать своим советом чужому успеху, и столь же горячо было его одобрение.

Эти черты научной личности и таланта Георгия Митрофановича вызывали к нему всеобщее уважение в нашем Институте. Было учреждено звание Народного консультанта, присвоенное ему в день семидесятилетия, который отмечался в нашем Институте. Этот день был для нас всех настоящим праздником. Мы как могли старались передать ему всю сердечную теплоту и благодарность. Звучали интермедии, песни, юмор. И все это было ему понятно, лицо светилось улыбкой и казалось, что он помолодел лет на двадцать. Сегодня, я пишу эти строки и вижу перед собой живые глаза Георгия Митрофановича.

*Память высвечивает слова Вероники Тушиновой:*

*«Если б не было учителя, то и не было б, наверное,  
ни поэта, ни мыслителя, ни Шекспира, ни Коперника  
И поныне бы, наверное, если б не было учителя,  
неоткрытые Америки оставались неоткрытыми.  
И не быть бы нам Икарами, никогда б не взмыли в небо мы,  
если б в нас его стараньями крылья выращены не были.  
Без его бы сердца доброго не был мир так удивителен.  
Потому нам очень дорого имя нашего учителя!».*

Хачай О.А.,  
доктор физ.-мат. наук,  
лаборатория скважинной геофизики.

## УЧИТЕЛЬ И ЧЕЛОВЕК



### *Пролог*

26 января 2013 года Георгию Митрофановичу Воскобойникову исполнилось бы 100 лет. В такие дни обычно вспоминают о юбиляре, о его делах, заслугах перед обществом и вообще... как о простом человеке. Я начал и провел свои первые 15 лет в науке под непосредственным руководством этого замечательного человека: высокообразованного, скромного, не терпящего лжи и подлога в науке, обладающего прекрасным чувством юмора, готового прийти тебе на помощь в самых различных вопросах как научных, так и житейских.

Большинство сотрудников вспоминают о Георгии Митрофановиче, как о блестящем теоретике в области радиометрии и потенциальных геофизических полей, однако приложение его таланта выходит далеко за эти рамки. Это особенно проявилось при решении практических задач предложенного им метода селективного гамма-гамма каротажа. Поэтому автор (В.И. Уткин, стоявший у начала этих работ) решил рассказать о роли Г.М. Воскобойникова в организации этих работ, их проведении и участии в дальнейшем развитии.

Георгий Митрофанович не отличался высокой плодовитостью по части количества научных статей. За время работы в Институте геофизики им написано около

сотни научных работ. По нынешним понятиям это не много, но практически каждую из них можно занести в золотой фонд геофизических исследований.

Неизвестно как бы сложилась судьба Георгия Митрофановича, как научного работника, если бы перед самой Великой Отечественной войной его, аспиранта кафедры астрономии и геодезии УрГУ, не командировали для производства геофизических измерений и для окончания работы над практически уже готовой кандидатской диссертацией в Гидрографическое управление Главсевморпути. Но... кратковременная командировка растянулась на долгие годы. Началась ВОВ. И, как рассказывал сам Георгий Митрофанович, его диссертация «рассыпалась по листочкам по всему Полярному кругу». За этот период времени (до 1951 г.) Г.М. Воскобойников прошел путь от астронома-геодезиста, начальника астрономической партии до начальника производственного отдела и руководителя вычислительного бюро различных экспедиций и баз Главсевморпути. И вот в начале 50-х годов в Геофизическом секторе Института геологии и геохимии Уральского филиала Академии наук СССР (ИГГ УФАН СССР) появился скромный сотрудник – Георгий Митрофанович Воскобойников. Надо отдать должное руководителю Геофизического сектора профессору Юрию Петровичу Булашевичу, который смог разглядеть в скромном сотруднике колоссальный потенциал исследователя.

Основное направление исследований Г.М. Воскобойникова в это время было связано с разработкой теоретических вопросов радиометрии и на их основе – разработкой новых методов полевых геофизических (радиометрических) измерений с целью определения вещественного состава горных пород, поиска и разведки месторождений как радиоактивных, так и не радиоактивных полезных ископаемых. Обзор этих работ достаточно полно представлен в статье этого номера «Некоторые пробле-

мы гамма-спектроскопии в исследованиях Г.М. Воскобойникова» В.В. Бахтерева.

Первые работы радиометрического направления Г.М. Воскобойникова составили диссертацию на соискание ученой степени кандидата наук. Эти работы выполнялись в условиях, когда в теории и практике радиометрии было много неясностей: была неизвестна зависимость регистрируемой интенсивности гамма-излучения естественных излучателей от состава горных пород и типа индикатора; усиленно дискутировалась и многими недооценивалась роль рассеянного гамма-излучения в формировании наблюдаемого эффекта; дискутировалась возможность раздельного определения содержания гамма-излучателей рядов урана и тория в горных породах и т.п., что являлось главным препятствием к правильному применению количественных методов разведочной радиометрии. Теоретические исследования Г.М. Воскобойниковым этих вопросов фактически сдвинули практику радиометрии с эмпирических позиций и привели ее теорию на новый качественный уровень.

Работы этого направления образуют замкнутый цикл, содержащий 12 печатных работ, естественно объединяемых под общим названием «теория и методы применения гамма-лучей в геофизической разведке». В первой серии работ этого цикла получены важнейшие результаты по расчету количественной зависимости гамма-излучения от состава естественно-радиоактивной среды и разновидности индикатора; разработана методика оптимального режима измерений и расчет коэффициента разделения излучателей рядов радиоактивных элементов при раздельном определении их содержания в комплексных рудах и др., которые определили направление обширных экспериментальных исследований ряда других авторов, а также составили основу для аппаратных и методических разработок современной количественной гамма-разведки.

Вторая серия работ этого периода времени посвящена теоретической и экспери-

ментальной разработке физических основ и методов применения гамма-излучения к задачам поиска и разведки нерадиоактивных полезных ископаемых. В частности, Г.М. Воскобойниковым был развит формальный аппарат диффузионного приближения применительно к решению задач о распространении «мягкого» гамма-излучения в рассеивающе-поглощающих средах, предпосылки которого были заложены в совместных с Ю.П. Булашевичем исследованиях по гамма-гамма каротажу на угольных месторождениях Урала (Булашевич, Воскобойников, 1957), разработаны теоретические основы селективного гамма-гамма каротажа и выявлены экспериментально его преимущества, что в совокупности с последующими методическими и аппаратными разработками предопределили широкое производственное использование нового эффективного радиометрического метода разведки. Дальнейшее развитие метода было выполнено совместно с В.И. Уткиным и Ю.Б. Бурдиным и привело к разработке спектральной модификации селективного каротажа, что сильно расширило возможности практического использования метода и послужило причиной его повсеместного использования в последующие годы.

Таким образом, в 1958 году усилиями Г.М. Воскобойникова и Ю.П. Булашевича была создана научно-обоснованная теоретическая база радиометрических методов исследований. Самым большим недостатком этого направления исследований было слабое экспериментальное подтверждение основных положений и выводов теории. Надо было создавать новую геофизическую аппаратуру. Для этих целей Г.М. Воскобойниковым были приглашены на работу в институт геофизики два молодых инженера-физика – Уткин Владимир Иванович и Бурдин Юрий Борисович.

#### *Начало*

К 1958 году в усилиями Г.М. Воскобойникова решение главных теоретических проблем гамма-радиометрии в основном было уже близко к завершению. Остро стоял вопрос об экспериментальной базе

для этих исследований. Дипломной работой Уткина и Бурдина, только что закончивших физико-технический факультет УПИ им. Кирова, было создание многоканального автоматического анализатора гамма-спектра, что являлось серьезной задачей для физиков-экспериментаторов в то время. Многоканальные анализаторы только-только стали появляться в физических лабораториях за рубежом.

Георгий Митрофанович сразу поставил перед нами задачу создания прецизионного скважинного сцинтилляционного гамма-спектрометра для ядерно-геофизических исследований в условиях работы в буровых скважинах.

Надо отметить, что в то время была единственная публикация по спектрометрам такого типа, да и то выполненная для работы в лаборатории (Wilkinson, 1950). По предложению Г.М. Воскобойникова было принято решение о расположении анализирующей части спектрометра в скважинном приборе и кодоимпульсной передаче информации по стандартному трехжильному кабелю, принятому в геофизических исследованиях. Приборов такого типа в отечественной (да и в мировой) геофизике в то время не было. Доклад об этом приборе, его первых испытаниях, сделанный на Всесоюзной конференции в 1960 г. (Уткин, 1962), вызвал бурю неоднозначных мнений, но все признали правоту Г.М. Воскобойникова – кодо-импульсный метод передачи информации решает массу проблем с получением надежной информации о спектральном составе рассеянного гамма излучения непосредственно в условиях буровых скважин.

Способ передачи информации оказался удачным: на данные не влияли ни работающие буровые станки, ни радиосигналы, которые «ловила» антенна – свободный трехжильный каротажный кабель. Впервые в мировой практике в условиях скважины было получено спектральное распределение рассеянных гамма-квантов относительно малой энергии (менее 100 кэВ). Тем более, что в те годы даже существовала теория

о невозможности регистрации гамма-квантов с энергией менее 200 кэВ в скважине.

В настоящее время кодо-импульсный метод передачи информации стал одним из основных при использовании комплексных геофизических приборов.

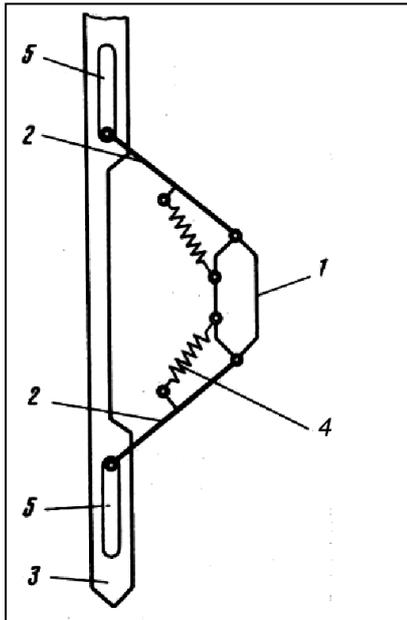
Сделать такую машину на электронных лампах было достаточно сложно и тем более сложно было добиться его надежной работы.

В этот период времени в электронной промышленности шла модернизация электронных ламп: привычные для нас «колбы» заменялись сначала лампами «пальчиковой» серии, затем «миниатюрной – М-серии» и «сверхминиатюрной – СМ-серии». Георгий Митрофанович, конечно, не принимал непосредственного участия в детальной разработке электронных схем, но разработка общего построения прибора, его функциональных возможностей, решение проблем зондовых устройств принадлежит ему. Георгий Митрофанович организовывал и материальное обеспечение разработки. Поэтому мы всегда имели достаточно новые элементы и некоторым образом не отставали от разработок нашей электронной промышленности.

К полевому сезону 1960-го года прибор был готов к испытаниям. Опять же Георгий Митрофанович через своих старых знакомых обеспечил нам практически идеальный полигон. Это было уже разведанное полиметаллическое (свинцово-сурьмяное) месторождение «Кужал» в Центральном Казахстане. Хорошо сохранившиеся глинобитные домики стали нашей лабораторией и жильем.

Необходимо сделать в этом месте небольшое отступление, которое опять же характеризует Георгия Митрофановича, как исключительного человека.

В 1960 году врачи вынесли ему страшный вердикт – подозрение на туберкулез. Поэтому Георгий Митрофанович организовал в полевых условиях себе отдельное помещение для проживания и приема пищи, он строго следил за тем, чтобы его посуда не попала в другие руки. Болезни миновали нас.



**Рис. 1.** Кинематическая схема прибора с выносным измерительным зондом (Уткин, 1975): 1 – измерительный зонд; 2 – система прижимных устройств; 3 – корпус глубинного прибора; 4 – пружины прижимного механизма; 5 – направляющие рычажной системы

### Измерительные зонды

Георгий Митрофанович показал себя не только талантливым руководителем проекта, но и великолепным конструктором.

На рубеже 50–60 годов прошлого столетия он предложил совершенно необычную конструкцию выносного измерительного зонда, прижимающегося плотно к стенке скважины и следующего за всеми вариациями диаметра скважины (рис. 1).

Расчет кинематики этого зонда был дан как тестовое задание Уткину, который не только сделал расчет этой достаточно сложной механической системы, но в будущем существенно модернизировал эту конструкцию.

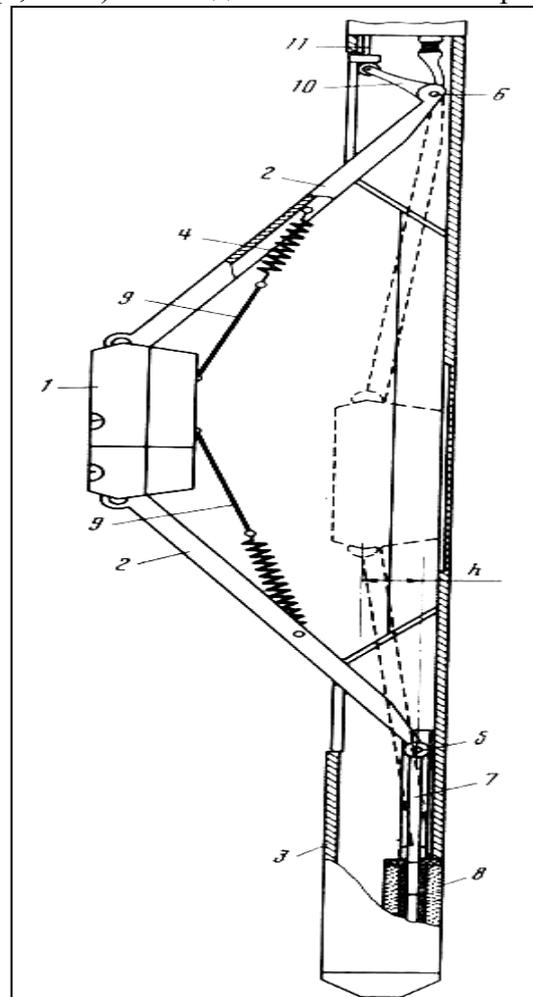
Несмотря на кажущуюся сложность конструкции, она работала очень надежно даже в угольных скважинах. Начиная с 60-х годов, все зондовые устройства ГГК-С снабжались таким измерительным блоком.

Скважинный прибор с выносным измерительным блоком, обеспечивающим неискаженную передачу энергетического распределения гамма-квантов, рассеянных

горными породами, был применен впервые в мировой практике.

В дальнейшем скважинные приборы превратились в сложные устройства, обеспечивающие комплексные измерения, например, ГГК-С и ГГК-П одновременно с кавернометрией (Уткин, 1975) (рис. 2). Перевод измерительного зонда в рабочее положение регулировался специальным электромагнитом, верхний рычаг прижимной системы использовался как привод каверномера.

В последние годы уже молодые конструктора применили для изготовления выносного зонда титановые сплавы, для экранировки детектора от источника медно-вольфрамовый псевдосплав (Хаматдинов и др., 2005). Последнее позволило построить



**Рис. 2.** Комплексный скважинный прибор: 1 – выносной измерительный зонд ГГК; 2 – прижимная система; 3 – корпус скважинного прибора; 4 – пружины; 5 и 6 – оси прижимной системы; 7 – ярмо электромагнита; 8 – электромагнит; 9 – тяги; 10 и 11 – каверномер

приборы для реализации метода названного селективным гамма-гамма каротажем и успешно применять его для поисков кварцевых жил на золоторудных месторождениях.

Подводя итоги данного раздела можно сказать, что рычажно-пружинная система, предложенная Г.М. Воскобойниковым и принятая специалистами по каротажу без особого восторга, оказалась жизнеспособной ввиду того, что она обеспечивала высокий уровень достоверности при исследовании гамма-гамма методами, особенно при использовании источников гамма-излучения малой (менее 100 кэВ) энергии.

**Методы калибровки измерительных зондов**

Зондовые устройства, предложенные Г.М. Воскобойниковым, относятся к измерительным зондам 2 $\pi$ -типа, то есть источник и регистратор находятся по одну сторону от плоскости измерения. Для таких зондов главными требованиями к калибраторам будут являться их размер и химический состав. Насыпные модели и растворы были отвергнуты ввиду их нетехнологичности и трудности сохранения двух главных параметров ГГК: атомного номера и плотности. Если к геометрическим размерам калибраторов особых вопросов не было, потому что максимальные размеры выносных зондов составляли 150–200 мм, то с моделями рассеивающих сред было сложнее.

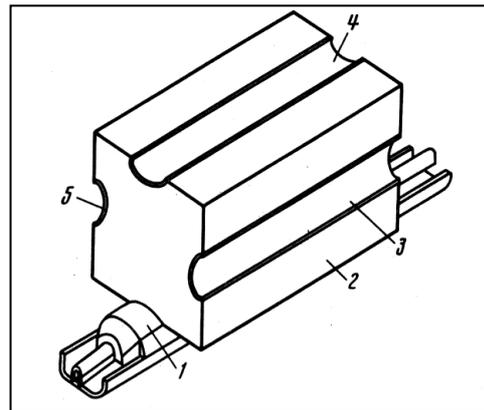
Г.М. Воскобойников предложил создать серии моделей неизменного атомного номера, но различной плотности, чтобы было возможно вводить поправки на вариации плотности при точных измерениях эффективного номера среды при проведении ГГК-С. Такие модели удалось создать

**Таблица.** Параметры модели ГГК-С

Содержание алюминия, %	100	80	60	40	35
Плотность, г/см <sup>3</sup>	2,7	2,2	1,6	1,08	0,95
Пористость, %	0	20	40	60	65

только при использовании «пористого алюминия», технология которого была разработана в Институте металлургии УрО РАН для производства металлических фильтров. Блоки, спрессованные при высокой температуре из алюминиевой крошки и поваренной соли, после промывки в кипящей воде превращались в жесткие пористые образования, что позволило создать серию образцовых искусственных сред – горных пород (таблица).

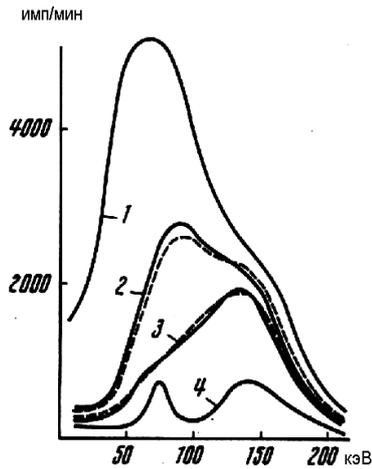
Интересно то, что при использовании такой технологии удалось получить модель необыкновенной рассеивающей среды с плотностью менее воды, но с атомным номером равным 13 (алюминий). Исследование особенностей рассеянного излучения на таких моделях позволило экспериментально оценить влияние плотности на данные измерения величины атомного номера различными зондовыми устройствами при



**Рис. 3.** Расположение калибровочного блока и выносного измерительного зонда: 1 – выносной измерительный блок ГГК; 2 – рассеивающая среда калибратора; 3, 4, 5 – фильтры из материалов повышенного (относительно материала рассеивающей среды) атомного номера

различных геометриях измерений.

Для проведения настройки приборов и контроля их правильной работы непосредственно в процессе измерений на скважине были разработаны переносные калибровочные блоки (рис. 3). Они представляли собой однородные блоки из материала малого атомного номера (электродный графит с плотностью 1,6 г/см<sup>3</sup> и атомным но-



**Рис. 4.** Спектр рассеянного гамма-излучения источника селен-75 на расстоянии 1 см: 1 — блочный графит (экв. атомный номер 6,5; плотность 1,6 г/см<sup>3</sup>); 2 — песчаник (атомный номер 12, плотность 2,1 г/см<sup>3</sup> — пунктир) и графит с фильтром из железа (толщина 2 мм); 3 — магнетитовая руда (пунктир) и графит с фильтром из олова толщиной 1 мм (сплошная линия); 4 — графит с фильтром из свинца толщиной 1 мм

мером 6,5), имеющие на плоских поверхностях углубления для размещения измерительных зондов ГГК-С.

Для соблюдения идентичности регистрируемого рассеянного горной породой и калибратором излучений применены фильтры, располагающиеся в углублениях на гранях калибратора. Применение соответствующих фильтров позволило практически полностью смоделировать форму спектра, рассеянного гамма-излучения для горных пород среднего атомного номера ( $Z=12$ ), железной руды и свинцового оруденения (рис. 4). Со временем фильтры стали применять для конкретных задач: например для контроля надежности работы выносных зондов при исследовании, поисков и разведки кварцевых жил на золоторудных месторождениях (Уткин, 1975).

#### **Заключение**

Работы Института геофизики конца 50-х, начала 60-х годов оказали громадное влияние на состояние ядерной геофизики. Последствия этой, можно сказать, технической революции в ядерной геофизике чувствуется до сих пор. В настоящее время в

мире не существует, например, скважинных приборов радиоактивного каротажа без прижимного измерительного блока, предназначенных для исследований скважин различными гамма-методами. Селективный каротаж вырос из тех рамок, которые ему предназначались его создателем — Г.М. Воскобойниковым. Спектрометрические измерения в области рассеянного горными породами гамма-излучения привело к созданию так называемого «литологического» каротажа, то есть тот же самый метод ГГК-С, но с изучением спектрального распределения рассеянного гамма-излучения (Велижанин и др., 2004; Хаматдинов и др., 2005). Выносные измерительные зонды, изготовленные из новых материалов (титановые сплавы, медно-вольфрамовые экраны), существенно расширили возможности методов ГГК и стали применимы на месторождениях нефти и газа (Хаматдинов и др., 2005). Большинство из предложений Г.М. Воскобойникова в теории и практике каротажных исследований методом ГГК-С сегодня можно рассматривать как классику, и я рад, что в начале своей научной деятельности Георгий Митрофанович Воскобойников привлек меня к участию в создании этой классики.

#### **Эпилог**

Прошло много лет. Однажды зазвонил телефон:

— Владимир Иванович, это говорят с острова Сахалин. Вы нам поставляли приборы СГГК-48, так они у нас уже все выработали свой ресурс и вышли из строя. Вы можете организовать нам изготовление новых таких приборов?

Бог мой! Страна развалилась, СССР не существует. Киевский завод давно продали нефтяникам. И мы уже почти 20 лет не занимаемся гамма-гамма каротажем. Опытное производство Института геофизики развалилось. Я разочаровал собеседника и отказался. Посоветовал работать с «Тверьгеофизикой», с моим старым другом Рафисом Хаматдиновым, у которого я был оппонентом докторской диссертации и руководил работой по диссертации его сына. Однако осталось приятное воспоминание — 25 лет назад нами под руко-

водством Г.М. Воскобойникова была сделана прекрасная работа по исследованию угольных пластов, и эта работа до сих пор живёт, правда, уже своей жизнью. Немногие ученые могут рассказать о такой долгой жизни своих идей.

### **Литература**

*Булашевич Ю.П., Воскобойников Г.М.* Гамма-гамма каротаж на угольных месторождениях Урала и возможность безтернового бурения части разведочных скважин // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1957. № 1. С. 109–112.

*Велижанин В.А., Хаматдинов В.Р., Вершинин А.В., Черменский В.Г., Саранцев С.Н., Точиленко Г.К.* Инструкция по проведению литолого-плотностного гамма-гамма-каротажа аппаратурой серии СГПЛ и обработке результатов измерений, МИ 41-17-1402-04. Тверь: Изд-во ГЕРС, 2004. 121 с.

*Уткин В.И.* Приборы для геофизических

исследований скважин // Тр. Всесоюзного семинара. Львов. 1960. Киев: Изд-во АН УССР, 1962.

*Уткин В.И.* Селективный гамма-гамма каротаж на угольных месторождениях. М.: Наука, 1975. 127 с.

*Хаматдинов В.Р., Велижанин В.А., Вершинин А.В., Саранцев С.Н., Черменский В.Г.* Спектрометрическая аппаратура литолого-плотностного гамма-гамма-каротажа нефтегазовых скважин // НТВ «Каротажник». 2005. № 2. С. 24–29.

*Wilkinson D.H.* Proc. Cambridge Phil. Soc., 46. 508. (1950).

Уткин В.И.,  
член-корр. РАН,  
советник РАН,  
гл. редактор журнала.

## НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГАММА-СПЕКТРОМЕТРИИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ Г.М. ВОСКОВОЙНИКОВА

**Бахтерев В.В.** – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

**Аннотация.** В 1950–60-е годы Институт геофизики в Свердловске (ныне – Екатеринбург) был центром разработки методов поиска полезных ископаемых методами гамма-излучения. Для того чтобы методы гамма-излучения могли быть применены на практике, требовалось решить множество теоретических, методических и аппаратурных задач. Г.М. Воскобойников был одним из исследователей, заложивших основы современных методов гамма-спектрометрии. В статье обсуждается вклад Г.М. Воскобойникова в исследования гамма-спектрометрии, в решение проблемы распределения интенсивности и спектра гамма-излучения в однородной излучающей среде, в применение методов гамма-излучения для определения состава горных пород и разведки руд.

*Гамма-спектрометрия, радиоактивные элементы, аппаратурный спектр, каротаж.*

## SOME PROBLEM OF GAMMA-SPECTROMETRY IN RESEARCHES OF GEORGIY M. VOSKOBOYNIKOV

**Bakhterev V.V.** – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

**Abstract.** In 1950–60-s the Institute for Geophysics in Sverdlovsk (now – Yekaterinburg) was the center for research in gamma-ray method of ore exploration. In order to make gamma-ray method applicable, many theoretical, methodological and hardware problems had to be solved. Georgiy M. Voskoboynikov was one of the researchers who have laid down the foundation for the present-day methods of gamma-logging. The paper analyses the contribution of Georgiy M. Voskoboynikov in research in gamma-spectrometry, solving the gamma-ray spectrum and intensity distribution in homogeneous emitting environment problem, and application gamma-ray method for minerals and ore exploration.

*Gamma rays spectral, radio-active elements, apparatus spectrum, logging.*

### **Введение**

В 50-е годы 19-го столетия остро стоял вопрос с поисками радиоактивного сырья. Основной метод поисков – радиоактивная разведка столкнулась с рядом трудностей. В теоретических вопросах радиометрии было много неясностей: была неизвестна зависимость регистрируемой интенсивности гамма-излучения естественных излучателей (руд радиоактивного сырья) от состава горных пород и типа индикатора, что являлось существенным препятствием к правильному применению количественных методов разведочной радиометрии; усиленно дискутировалась роль рассеянного гамма-излучения в формировании наблюдаемого эффекта; дискутировалась возможность раздельного определения содержания гамма-излучателей рядов урана и тория в горных породах и рудах и т.д. Исследование этих зависимостей и разработка соответствующих методов геофизической радиометрии велась почти целиком с эмпирических позиций; некоторые чрез-

мерно упрощенные теоретические соображения в своем большинстве не отражали существа исследуемого явления и не способствовали правильному решению вопроса. В Институте геофизики УФАН СССР (ныне УрО РАН) Г.М. Воскобойниковым было получено теоретическое решение этих вопросов и выполнен теоретический расчет соответствующих количественных зависимостей. Пионерскими результатами, оказавшими существенное влияние на становление и развитие теории и методики гамма-спектрометрии, полученными в этих работах, являются:

– Предложен простой, но практически достаточно точный метод расчета спектрального состава и интенсивности гамма-излучения в зависимости от среднего атомного номера элементов среды. В отличие от вполне строгих, но весьма трудоемких методов расчета, предложенный метод требует сравнительно небольшой затраты труда и в то же время обеспечивает сохранение всех характерных особенностей явле-

ния и приемлемую точность результатов (Воскобойников, 1957а).

– Расчет количественной зависимости между интенсивностью гамма-излучения, регистрируемого конкретным индикатором, и составом естественно-радиоактивной среды. Из данных этой работы следует, в частности, что при заданном содержании излучателя в реально встречающихся рудах регистрируемая интенсивность излучения может изменяться в зависимости от состава руды (для руд радиоактивных элементов – в 2–3 раза) (Воскобойников, 1957б).

– Способ подсчета запасов радиоактивных руд по данным гамма-каротажа. Такой способ основан на связи между площадью каротажной диаграммы и процентным линейным запасом по скважине («теорема о площади»). Теорема первоначально была доказана в лучевом приближении (Булашевич, 1946). Теоретически доказано, что  $S = h \cdot I_{\infty}$ , где  $S$  – площадь аномального пика гамма-каротажной кривой (мкр/ч·см);  $h$  – мощность рудного тела (см);  $I_{\infty}$  – интенсивность гамма-излучения бесконечного пласта (мкр/ч). Отсюда следует, что  $S = h \cdot K_{4\pi} \cdot Q$ , где  $K_{4\pi}$  – коэффициент пересчета при  $\omega = 4\pi$ . Следовательно, содержание урана в точке пересечения рудного тела скважиной может быть найдено из отношения  $Q = S / K_{4\pi} \cdot h$ . Однако было не ясно, сохранится ли она при учете рассеянного излучения. В 1955 г. Ю.П. Булашевич показал, что принцип суперпозиции гамма-полей обеспечивает выполнение этой теоремы для случая однородной среды (Булашевич, 1955). В 1960 г. в Известиях АН СССР была опубликована статья Г.М. Воскобойникова «К теории интерпретации данных гамма-каротажа в слоистых средах», в которой дано «спектральное» обобщение теоремы для случая слоистого неоднородного разреза (Воскобойников, 1960). Рассмотрен метод расчета гамма-поля в излучающе-поглощающей слоистой среде путем эквивалентного преобразования заданной среды в среду постоянной плотности. С помощью такого преобразования находится обобщенное выражение теоремы о площа-

ди, ограниченной кривой гамма-аномалии, пригодное для подсчета линейного запаса источника излучения в среде переменной плотности. Показано, что в слоистой среде неизменного состава существует вполне строгая прямая пропорциональность между линейным запасом излучателя и интегралом от интенсивности излучения, взятым вдоль линии наблюдений с весом, равным площади среды; при постоянной плотности это соотношение переходит в известную теорему о площади аномалии. В комптоновской области спектра оно с достаточной для практики точностью выполняется в реальных горных породах переменного состава. Статья подвела итог многолетним поискам оптимальной количественной интерпретации поисковых работ. Так называемая «теорема о площади Булашевича-Воскобойникова» позволяла рассчитать линейные запасы урана с учетом плотности среды – различного химического состава.

Другая часть работ посвящена теоретической и экспериментальной разработке физических основ и методов применения гамма-излучения к задачам поиска и разведки нерадиоактивных полезных ископаемых. В работе (Воскобойников, 1957в) развит формальный аппарат диффузионного приближения применительно к решению задач о распространении мягкого гамма-излучения в рассеивающе-поглощающих средах. На основе этого аппарата произведен численный расчет ожидаемого эффекта ослабления рассеянного излучения в двухкомпонентных средах и предложен метод селективного гамма-каротажа (СГГК) для обнаружения и количественного исследования рудных зон в буровых скважинах на месторождениях элементов высокого атомного номера. Решены аппаратные и методические вопросы. Приведены производственные результаты (Воскобойников, Балашов, Главчев, 1962; Воскобойников, 1965). Показано, что метод селективного каротажа позволяет выделять и количественно исследовать рудные зоны на месторождениях тяжелых металлов (в частности – свинец) со средней

статистической точностью, в благоприятных условиях (при отсутствии мешающих тяжелых элементов) не уступающей точности геологического опробования.

Решены также главные методические и аппаратные вопросы гамма-гамма каротажа (ГГК) на угольных месторождениях (Воскобойников, Деев, 1956; Булашевич, Воскобойников, 1957; Булашевич, Воскобойников, Музюкин, 1961). Дальнейшее развитие ГГК и СГГК получили в работах В.И. Уткина и Ю.Б. Бурдина (например, Воскобойников, Уткин, Бурдин, 1961 и др.).

Теоретические, методические, аппаратные, экспериментальные исследования Г.М. Воскобойникова имели принципиальное определяющее значение для общего направления работ. Они, можно сказать, дали старт обширной серии экспериментальных исследований, которые показали вполне удовлетворительное согласие с теоретическими результатами и, вместе с последними, составили основу для разработки стандартной системы исходных параметров и требований к аппаратуре для современной количественной гамма-разведки.

**Спектральное распределение гамма-излучения монохроматического источника в однородной среде**

При прохождении гамма-квантов через вещество (горные породы) происходит изменение плотности потока частиц и их энергии. По мере удаления от источника на фоне постоянно уменьшающегося количества первичных квантов растет число рассеянных гамма-квантов. Энергия рассеянных гамма-квантов уменьшается в результате каждого акта рассеяния, поэтому доля гамма-квантов малой энергии постоянно возрастает. При малых энергиях гамма-квантов возрастает вероятность фотопоглощения, поэтому в области достаточно низких энергий число рассеянных квантов резко падает. Накопление квантов низких энергий в результате рассеяния и их поглощения при фотоэффекте приводит к образованию максимума в энергетическом спектре рассеянного гамма-излучения. Распределение гамма-квантов в энергетическом спектре непрерывное от максималь-

ной энергии, равной энергии источника, до некоторой минимальной энергии в области интенсивного фотопоглощения (Альфа-..., 1969).

Расчет распределения гамма-излучения в веществе с учетом многократного рассеяния – очень сложная и трудоемкая задача. В работе (Воскобойников, 1957б) она выполнена при решении интегрального уравнения равновесия гамма-излучения в однородной гамма-излучающей среде. Интенсивность и спектральное распределение рассеянного гамма-излучения в однородной среде с равномерным распределением монохроматических источников могут быть определены из интегрального уравнения

$$\frac{I'(E_1, E)}{I_1(E_1)} = \frac{W(E_1, E)}{\mu(E)} + \frac{1}{\mu(E)} \int_E^{E_1} I'(E_1, E')W(E', E)dE', \tag{1}$$

где  $I_1(E_1) = \frac{Q(E_1)}{\mu(E_1)}$  – интенсивность первич-

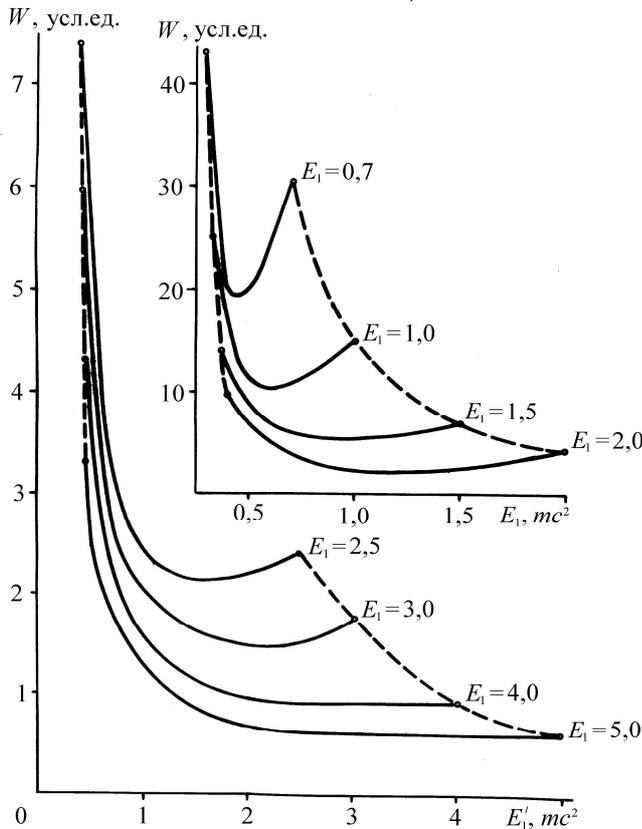
ного (нерассеянного) излучения с энергией квантов  $E_1$ ;  $Q(E_1)$  – удельная плотность распределения монохроматических источников, выраженная в единицах (число квантов/с·г);  $\mu(E)$  – полный массовый коэффициент ослабления излучения с энергией квантов  $E$  (полное макроскопическое сечение взаимодействия в расчете на 1 г среды);  $I'(E_1, E)$  – спектральная (дифференциальная) интенсивность рассеянного излучения в единицах (число квантов/см<sup>2</sup>·с·МэВ);  $W(E_1, E)$  – дифференциальное макроскопическое сечение рассеяния в единицах (см<sup>2</sup>/МэВ·г) (вероятность образования кванта с энергией от  $E$  до  $E+dE$  из кванта с энергией  $E_1$  в процессе комптоновского взаимодействия внутри объема, занимаемого одним граммом вещества среды). В дифференциальных параметрах  $I', W$  первый аргумент означает энергию первичных, второй – энергию рассеянных квантов.

Дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется формулой Клейна-Нишины-Тамма и имеет вид (Воскобойников, 1962; Воскобойников, Карташов, 1959)

$$W(E_1, E) = \pi \cdot r_0^2 n \left[ \frac{1 + \left(\frac{E}{E_1}\right)^2 - \frac{(E_1 - E)^2}{E_1^2} + \frac{(E_1 - E)^2}{E_1^3 E}}{E_1 E} \right], \quad (2)$$

где  $r_0$  – томсоновский радиус электрона;  $n$  – число электронов в 1 г вещества среды. Рассчитанные по формуле (2) дифференциальные эффективные сечения рассеяния для различных энергий первичных гамма-квантов приведены на рис. 1.

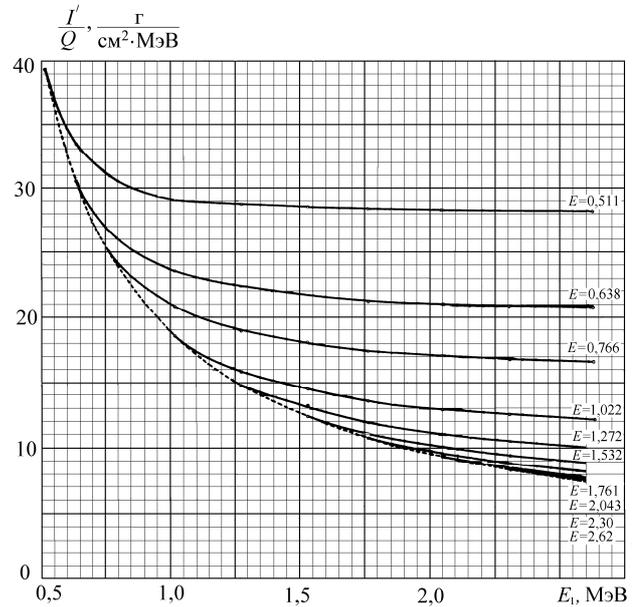
Физически уравнение (1) устанавливает тот факт, что спектральная интенсивность рассеянных лучей данной энергии в условиях равновесия складывается из спектральной интенсивности вторичных лучей этой энергии, образующихся непосредственно из первичных лучей источника (первый член правой части), и спектральной интенсивности рассеянных лучей, которые образуются в процессе последующе-



**Рис. 1.** Дифференциальное эффективное сечение рассеяния гамма-квантов с начальной энергией  $E_1$  в интервале энергий от  $E'$  до  $E'+\Delta E$ . Шифр кривых – энергии первичных гамма-квантов (Воскобойников, 1957а)

го рассеяния вторичных лучей более высоких энергий (второй интегральный член).

С точностью до множителя, обратно пропорционального плотности среды,



**Рис. 2.** Зависимость спектральной интенсивности излучения  $I/Q$  (при единичной плотности источника  $Q$ ) от энергии первичных квантов  $E_1$ . Шифр кривых – энергии рассеянных квантов (Воскобойников, 1962)

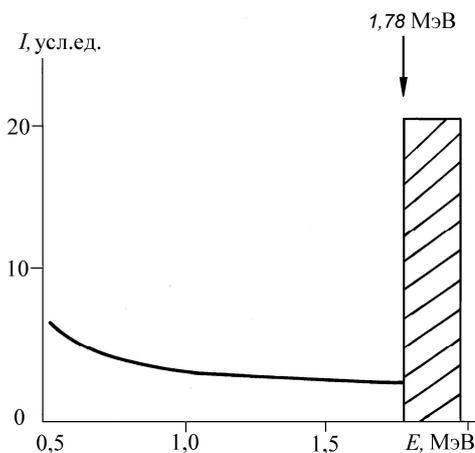
уравнение (1) определяет также средний спектр (нулевой момент функции распределения) рассеянных квантов от монохроматического источника, произвольно распределенного в конечном объеме безграничной однородной среды.

В процессе решения ряда частных задач радиометрии Г.М. Воскобойников получил численными методами строгое решение этого уравнения в диапазоне энергий первичных и рассеянных квантов от 0,51 до 2,62 МэВ для горных пород среднего атомного состава. Уравнение (1) в работе (Воскобойников, 1962) решено графически. Результаты решения приведены на рис. 2 в виде семейства кривых  $I/Q$ , представляющих спектральную интенсивность излучения (при единичной плотности источника) как функцию энергии первичных квантов  $E_1$ ; параметром кривых семейства является энергия рассеянных квантов  $E$ , значения которой выписаны справа при соответст-

вующих кривых. С помощью этих графиков может быть найдено спектральное распределение и интенсивность рассеянного излучения, создаваемого в однородной среде равномерно распределенными источниками гамма-квантов с произвольной (в рассматриваемом диапазоне) начальной энергией  $E_1$ . Для этого достаточно графически построить зависимость  $I'/Q$  от параметра  $E$  по точкам пересечения кривых семейства с вертикальной прямой, соответствующей заданному значению  $E_1$ ; значение  $I'(E_1, E)$  определяется по точке пересечения той же прямой с пунктирной кривой, соединяющей концы кривых семейства. Значения  $I'/Q$ , снятые с графика, умножаются на заданную мощность источника  $Q$ ; в случае многолинейчатого спектра источника результаты, полученные для отдельных спектральных линий, суммируются при каждом значении  $E$ .

Представленное на графиках (рис. 2) решение уравнения (1) получено Г.М. Воскобойниковым для схематизированной горной породы следующего атомного состава (вес. %): O – 50, Al – 8, Si – 40, Fe – 2. Этот состав примерно соответствует гранитам (Воскобойников, 1962).

На рис. 3 приведена рассчитанная нами кривая спектрального распределения гамма-излучения в однородной среде от источника  $Al^{28}$ .



**Рис. 3.** Спектральное распределение гамма-излучения точечного источника  $Al^{28}$  в однородной рассеивающей среде (Бахтерев, Сенько-Булатный, Харус, 1977)

### Спектр вторичных электронов в кристалле $NaJ(Tl)$

В сцинтиляторе под действием гамма-квантов возникают вторичные  $\beta$ -частицы: фотоэлектроны от первичных лучей, фотоэлектроны от непрерывного спектра (рассеянных лучей), комптон-электроны от первичных лучей и от непрерывного спектра, электрон-позитронные пары. Сцинтиляционный счетчик (фосфор) в соединении с фотоэлектрическим множителем дает электрические импульсы, амплитуда которых пропорциональна энергии вторичных электронов.

Плотность распределения фотоэлектронов от непрерывного спектра ( $N'_\phi$ ) и число монохроматических фотоэлектронов ( $N_\phi$ ) получаем умножением массового коэффициента фотопоглощения  $\tau(E)$  в кристалле  $NaJ(Tl)$  соответственно на  $I'$  и  $I$ :

$$N'_\phi = I' \cdot \tau(E); N_\phi = I \cdot \tau(E). \quad (3)$$

Энергия  $\beta$ -частиц принята равной энергии гамма-квантов за вычетом энергии ионизации йода в  $K$ -оболочке, равной 33 кэВ. Принимая во внимание, что при комптоновском взаимодействии  $E_\beta = E_1 - E'$ , находим количество комптон-электронов от первичных лучей ( $N'_k$ ) и непрерывного спектра ( $N'_k$ ) из выражений:

$$N'_k = W(E_1, E)I_1, \quad (4)$$

$$N'_k = \int_{E_{min}}^{E_1} W(E', E)I'(E')dE.$$

Максимальная энергия электронов связана с энергией падающих гамма-квантов соотношением (Альфа-..., 1969)

$$E_\beta^{max} = \frac{2E^2}{1 + 2E}. \quad (5)$$

В выражении (5)  $E_\beta^{max}$  и  $E$  соответственно энергии электронов и квантов в единицах  $mc^2$ . Энергия  $\beta$ -лучей изменяется от 0 до  $E_\beta^{max}$ . При энергии  $E_1 > 2mc^2$  возможно образование дополнительных пиков, связанных с возникновением пары электрон-позитрон. Число таких пар определяем следующим образом:  $N_\pi = I_1X$ , где  $X$  – коэффициент образования электрон-позитронных пар в кристалле  $NaJ(Tl)$ .

При расчете спектров  $\beta$ -частиц не учитываются краевые эффекты у границ сцинтиллятора и многократные взаимодействия гамма-квантов в веществе фосфора. Поэтому наиболее точные результаты получаются для сцинтилляторов изометрической формы и весом 50–100 г. Для очень больших сцинтилляторов точность расчетов понижается, так как для них существенное значение приобретает двукратное взаимодействие гамма-квантов (Воскобойников, Карташов, 1959). Амплитудное распределение импульсов, регистрируемых сцинтилляционным гамма-спектрометром, зависит от ширины окна.

**Пример расчета спектрального распределения гамма-излучения в однородной среде от равномерно распределенного источника  $Al^{28}$**

*Интенсивность первичного излучения.* Интенсивность гамма-квантов определенной энергии, испускаемых ядром, определяется следующим образом

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_V Q \exp(-\mu \cdot r) dV = Q/\mu, \text{ квант/мин}\cdot\text{см}^2,$$

где  $Q = N\lambda\rho v$  – мощность источника;  $N$  – число атомов в 1 г породы;  $\lambda$  – постоянная распада  $Al^{28}$ ;  $\rho$  – процентное содержание алюминия в породе;  $v$  – выход гамма-квантов на распад.

Для упрощения коэффициент пропорциональности положим равным единице  $N\lambda\rho v = 1$ , тогда  $Q = v$  квант/мин·г;  $\mu$  – массовый коэффициент поглощения гамма-квантов, зависящий от энергии фотона и от поглощающего вещества (горной породы).  $E = 1,78 \text{ МэВ}$ ;  $\mu = 0,046$ ;  $v = 1$ , тогда  $I(1,78) = 1/0,046 = 21,7 \text{ квант/мин}\cdot\text{см}^2$ .

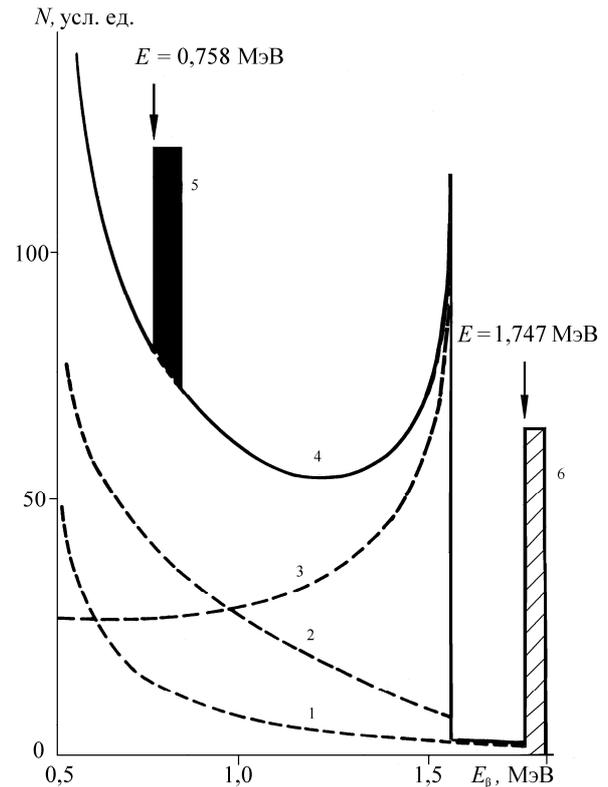
*Спектральная интенсивность рассеянного излучения.* Значения  $I'/Q$  для 1,78 МэВ сняты с рис. 2 и приведены в табл. 1. На рис. 3 дано рассчитанное нами спектральное распределение гамма-излучения в однородной среде от равномерно распределенного источника  $Al^{28}$ .

**Таблица 1.** Порядок расчета спектральной интенсивности рассеянного излучения

$E, \text{ МэВ}$ рассеянных квантов	0,511	0,638	0,766	1,022	1,277	1,532	1,78
$I'/Q$ для 1,78 МэВ	28,3	21,3	17,4	13,5	11,8	10,9	10,5
$I'$ квант/мин·см <sup>2</sup>	28,3	21,3	17,4	13,5	11,8	10,9	10,5

**Спектр вторичного  $\beta$ -излучения (аппаратурный спектр)**

Спектр вторичных  $\beta$ -лучей, образующихся в кристалле NaJ под действием гамма-излучения  $Al^{28}$ , приведен на рис. 4. Плотность распределения фотоэлектронов ( $N'_\phi$ ) от непрерывного спектра и число монохроматических фотоэлектронов ( $N_\phi$ ) получаем умножением массового коэффициента фотопоглощения в кристалле NaJ со-



**Рис. 4.** Спектр вторичных  $\beta$ -лучей, образующихся в кристалле NaJ(Tl) под действием гамма-излучения  $Al^{28}$ : 1 – фотоэффект от непрерывного спектра; 2 – комптон-эффект от рассеянных лучей; 3 – комптон-эффект от первичных лучей; 4 – суммарная плотность  $\beta$ -частиц в непрерывном спектре (сумма ординат кривых 1–3); 5 – фотоэффект от первичных гамма-квантов; 6 – эффект приближенно монохроматических пар электрон-позитрон, образующихся за счет первичных гамма-квантов. Истинная энергия частиц отмечена стрелками

Таблица 2. Расчет фото-эффекта от рассеянных гамма-квантов

$E'_\gamma$ , МэВ (рассеянные)	0,511	0,638	0,766	1,022	1,277	1,532	1,78
$E_\beta$ , МэВ	0,478	0,605	0,733	0,989	1,244	1,499	1,747
$I'/Q$	28,3	21,3	17,4	13,5	11,8	10,9	10,5
$I'$	28,3	21,3	17,4	13,5	11,8	10,9	10,5
$\tau \cdot 10^2$	1,44	0,87	0,56	0,29	0,20	0,16	0,13
$N'_\phi \cdot 10^2$	40,75	18,50	9,75	3,92	2,36	1,75	1,36

ответственно на  $I$  и  $I'$ . Энергия  $\beta$ -частиц принята равной 33 кэВ.

Фотоэффект от первичных лучей равен:  $N_\phi = I \cdot \tau$  (для  $E = 1,747$  МэВ);  $I = 21,7$ ;  $\tau = 0,0015$ ;  $N_\phi = 21,7 \times 0,0015 = 0,0325$  квант/мин·г.

Фотоэффект от непрерывного спектра  $N'_\phi = I' \cdot \tau(E')$  приведен в табл. 2.

Комптон-эффект от первичных лучей. Принимая во внимание, что при комптоновском взаимодействии энергия  $\beta$ -частиц  $E_\beta = E_1 - E'$  ( $E_1$  – энергия первичных квантов;  $E'$  – энергия рассеянных лучей), находим количество комптон-электронов от первичных лучей  $N_k$  и непрерывного спектра  $\sum N'_k$ .

Комптон-эффект от первичных лучей  $N_k = W(E_1, E) \cdot I$ .  
 $E_1 = 1,78$  МэВ =  $3,49 \text{ mc}^2$ ;  $I = 21,7$ .  
 $E_{\gamma(\min)} = E_1 / (1 + 2E_1) = 3,49 / (1 + 2 \cdot 3,49) = 0,437 \text{ mc}^2$ .  
 $E'_{\gamma(\min)} = 0,222$  МэВ.  
 $E_{\beta(\max)} = 3,490 - 0,437 = 3,053 \text{ mc}^2$ .  
 $E_\beta$  изменяется от 0 до  $E_{\beta(\max)}$ ;  $E'_\gamma$  изменяется от  $E_1$  до  $E'_{\gamma(\min)}$ .

Результаты расчета комптон-эффекта от первичных лучей даны в табл. 3.

Комптон-эффект рассеянных лучей. Количество комптон-электронов от непрерывного спектра  $\sum N'_k$  равно

$$\sum N'_k = \int_{E_{\min}}^{E_1} W(E', E) \cdot I'(E') dE'.$$

$$\begin{aligned} \sum N'_k = & W(0,511, E) \cdot I'(0,511) \cdot \Delta E_1 + \\ & + W(0,638, E) \cdot I'(0,638) \cdot \Delta E_2 + \dots \\ & + W(1,664, E) \cdot I'(1,664) \cdot \Delta E_{(n-1)} + \\ & + W(1,78, E) \cdot I'(1,78) \cdot \Delta E_n, \end{aligned}$$

где

$$\Delta E_1 = [(0,511 + 0,638) / 2] - E_{\min} = 0,575 - 0,223 = 0,352;$$

$$\Delta E_2 = [(0,638 + 0,766) / 2] - [(0,511 + 0,638) / 2] = 0,702 - 0,575 = 0,127;$$

$$\Delta E_n = 1,780 - [(1,780 + 1,664) / 2] = 1,780 - 1,722 = 0,058.$$

Каждое слагаемое  $N'_k$  суммы  $\sum N'_k$  рассчитывается так же, как и эффект от первичных лучей. Исходные данные для расчета приведены в табл. 4.

Таблица 3. Результаты расчета комптон-эффекта от первичных лучей

$E_\beta (\text{mc}^2)$	$E_\beta (\text{МэВ})$	$E'_\gamma (\text{mc}^2)$	$W(E_1 = 3,49 \text{ mc}^2) \cdot 10^2$	$N_k$
1,0	0,511	2,49	1,16	0,252
1,2	0,613	2,29	1,16	0,252
1,4	0,715	2,09	1,16	0,252
1,6	0,818	1,89	1,20	0,261
1,8	0,920	1,69	1,25	0,271
2,0	1,022	1,49	1,32	0,286
2,2	1,124	1,29	1,43	0,310
2,4	1,227	1,09	1,63	0,354
2,6	1,327	0,89	1,98	0,430
2,8	1,430	0,69	2,60	0,565
3,053	1,560	0,437	5,00	1,085

Таблица 4. Исходные данные для расчета комптон-эффекта рассеянных гамма-квантов

$E'_\gamma$ (МэВ)	$E'_\gamma$ ( $mc^2$ )	$E_{\gamma\min}$ ( $mc^2$ )	$E_{\beta\max}$ ( $mc^2$ )	$I'$
0,511	1	0,333	0,667	28,3
0,638	1,25	0,357	0,893	21,3
0,766	1,50	0,375	1,125	17,4
0,895	1,75	0,388	1,362	14,9
1,022	2,00	0,400	1,600	13,5
1,150	2,25	0,409	1,841	12,5
1,277	2,50	0,417	2,083	11,8
1,407	2,75	0,420	2,330	11,2
1,532	3,00	0,425	2,575	10,9
1,664	3,25	0,432	2,818	10,7
1,780	3,49	0,437	3,053	10,5

В качестве примера приводим расчет комптон-эффекта от рассеянных лучей с энергией 1,022 МэВ. Из табл. 4 имеем:  $E'_\gamma = 1,022$  МэВ =  $2,00 mc^2$ ;  $E_{\beta\max} = 1,60 mc^2$ ;  $\Delta E = 0,120$  МэВ;  $I'(E' = 1,022) = 13,5$ . Схема расчета видна из табл. 5.

Суммирование значений  $N'_k(E')$  для всех энергий  $E'$ , приведенных в табл. 4, производим графически.

*Электрон-позитронные пары.* При взаимодействии гамма-излучения с атомными ядрами возможно возникновение пары электрон-позитрон за счет поглощения энергии фотона. Возникновение пар сопровождается, так же как и фотоэффект, полным поглощением гамма квантов.

Этот процесс наблюдается только при поглощении гамма-квантов с энергией не менее 1,022 МэВ.

$N_n(E_1 - 1,022) = N_n(0,758 \text{ МэВ}) = I \cdot \chi$ ,  
 где  $\chi$  – массовый коэффициент образования пар в кристалле NaJ.  
 $\chi = 0,0015 \text{ см}^2/\text{г}$ ;  $I = 21,7$ ;  
 $N_n = 0,0015 \cdot 21,7 = 0,0326$  квант/мин·г.

**Аппаратурные спектры гамма-излучения активированных нейтронами радиоактивных элементов**

Необходимость в таких расчетах возникает при разработке гамма-спектрометрических методик ядерно-геофизических методов поисков и разведки полезных ископаемых. Особое значение они приобретают при разработке методик гамма-спектрометрического нейтронного активационного каротажа (НАК) (Сенько-Булатный, Бахтерев, 1971; Сенько-Булатный, Бахтерев, Харус, 1971).

Опираясь на работы Г.М. Воскобойникова, Бахтерев В.В., Сенько-Булатный И.Н., Харус Р.Л. описали методику расчета аппаратурных гамма-спектров и рассчитали гамма-спектры нескольких десятков радиоактивных изотопов, интересных с точки зрения постановки спектрометрического НАК (Бахтерев, Сенько-Булатный, Харус, 1977).

При этом имелось в виду, что источники гамма-излучения, образующиеся в ре-

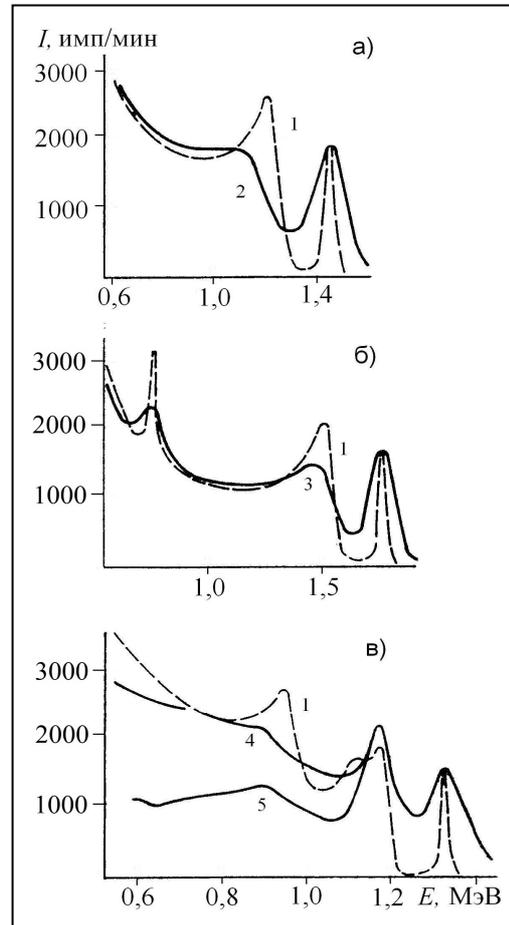
Таблица 5. Схема расчета комптон-эффекта от рассеянных гамма-квантов

Энергия рассеянных $\gamma$ -квантов (от $E = 1,022$ МэВ) $E'_\gamma$ ( $mc^2$ )	2,00	1,50	1,00	0,80	0,60	0,40
$E_\beta, mc^2$	0	0,5	1,0	1,2	1,4	1,6
$E_\beta, \text{МэВ}$	0	0,255	0,511	0,613	0,715	0,817
$W(E' = 2,00 mc^2) \cdot 10^2$	3,1	3,2	3,3	3,7	4,9	9,7
$N'_k(E' = 2,00 mc^2)$	5,36	5,53	5,71	6,40	8,47	16,79

зультате облучения горных пород нейтронами, распределены в среде неравномерно. Размер локальной области определяется глубиной ядерного метода. Радиус области вокруг источника быстрых нейтронов, в которой образуются радиоактивные изотопы, и определяющий глубину НАК, является величиной переменной и, например, для медноколчеданных месторождений оценивается в 10–25 см в зависимости от химического и минералогического состава руд. В этом случае соотношение, которое устанавливается между первичным и рассеянным излучением, иное, чем при равномерном распределении источников в однородной безграничной среде. Предполагалось оценить правомерность использования методики расчета спектров, разработанной Г.М. Воскобойниковым для случая равномерного распределения источников в однородной рассеивающей среде, также на случай неравномерного локального распределения источников, образующихся в результате облучения горных пород нейтронами (Бахтерев, 1985).

С этой целью по методике Г.М. Воскобойникова рассчитаны спектральные распределения гамма-излучения  $K^{40}$ ,  $Al^{28}$ ,  $Cl^{38}$ ,  $Co^{60}$  в однородной рассеивающей среде и их аппаратурные спектры. Аппаратурные спектры гамма-излучения этих же изотопов получены экспериментально для трех различных случаев распределения источников в среде. Первый случай – распределение изотопа  $K^{40}$  в гранитах в их естественном залегании – случай равномерного распределения источников в однородной безграничной рассеивающей среде. Второго случая – неравномерное локальное распределение радиоактивных изотопов  $Al^{28}$ ,  $Cl^{38}$ , образующихся за счет  $Al^{27}$  и  $Cl^{37}$ , содержащихся в горных породах, по  $(n, \gamma)$ -реакции. Третий, предельный случай – точечный источник  $Co^{60}$ . Гамма-спектры  $K^{40}$ ,  $Al^{28}$ ,  $Cl^{38}$  измерены в условиях скважины диаметром 76 мм и заполненной водой. Диаметр скважинного снаряда 60 мм. Детектор гамма-излучения – кристалл йодистого натрия размером 30x70 мм, ФЭУ-13. Анали-

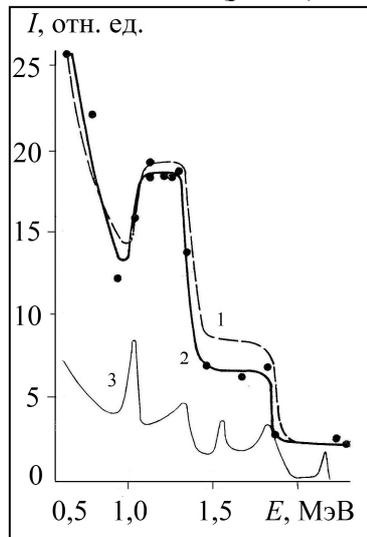
затор импульсов – АИ-128. При изучении спектра гамма-излучения  $Co^{60}$  расстояние между источником и детектором было равно 50 мм. Теоретически рассчитанные и полученные экспериментально спектры сопоставлены (рис. 5, 6).



**Рис. 5.** Аппаратурные спектры гамма-излучения  $K^{40}$  (а),  $Al^{28}$  (б),  $Co^{60}$  (в). Ширина окна 25 кэВ (Бахтерев, 1985): 1 – теоретический расчет; 2–5 – экспериментально полученные аппаратурные спектры

Установлена хорошая сходимость спектров  $K^{40}$ ,  $Al^{28}$ ,  $Cl^{38}$ . И только для  $Co^{60}$  вид экспериментально полученного спектра в области энергий ниже первичного излучения существенно отличается от спектра, рассчитанного теоретически. Это понятно, так как здесь в кристалл попадает почти коллимированное первичное излучение. Но уже свинцовый экран толщиной 50 мм, установленный между источником и детектором, резко меняет вид аппаратурного спектра, приближая его к спек-

тру, рассчитанному теоретически для среды с равномерно распределенными источниками. При ширине окна 25 кэВ на спектрограммах, полученных как теоретически, так и экспериментально, отчетливо проявляются спектральные особенности гамма-излучения изучаемых радиоактивных изотопов. С увеличением ширины окна картина распределения импульсов аппаратурного спектра сильно сглаживается и сходимость теоретически рассчитанного и экспериментально полученного спектров оказывается достаточно тесной (рис. 6).



**Рис. 6.** Аппаратурный спектр гамма-излучения  $Cs^{138}$ . Ширина окна 200 кэВ (Бахтерев, 1985): 1 – теоретический расчет; 2 – экспериментально полученный спектр гамма-излучения (темные кружки – значения интенсивности гамма-излучения, измеренные в определенной энергетической области); 3 – теоретический расчет с шириной окна 25 кэВ

Методика широко использована при разработке спектрометрического активационного каротажа на месторождениях различных полезных ископаемых. Теоретические расчеты, подтвержденные экспериментальными исследованиями, выполненными непосредственно в условиях разведочных скважин, показали, что относительный вклад гамма-излучения изучаемого изотопа в суммарную величину наведенного гамма-излучения резко увеличивается при измерении в определенных энергетических интервалах спектра. На основании теоретических расчетов и ми-

нимальном объеме экспериментов определены оптимальные энергетические режимы НАК на месторождениях меди, бокситов (Сенько-Булатный, Бахтерев, Харус, 1967; Сенько-Булатный, Бахтерев, 1971).

Позднее появились способы расчета аппаратурных спектров методом Монте-Карло с использованием ЭВМ. Однако методика Г.М. Воскобойникова позволила получить качественно правильное представление о спектральном распределении гамма-излучения гораздо быстрее и проще.

**Развитие идей и разработок Г.М. Воскобойникова применительно к нейтронному активационному каротажу**

Разработка теоретических вопросов геофизической радиометрии и на их основе новых методов радиометрических измерений с целью определения вещественного состава горных пород, поисков и разведки месторождений как радиоактивных, так и не радиоактивных полезных ископаемых оказали существенное влияние на становление и развитие методов не только при поисках радиоактивных руд. Основной источник затруднений при количественной интерпретации радиометрических методов (гамма-разведки, нейтронного активационного каротажа) – нелинейный характер зависимости излучения как естественных излучателей (Воскобойников, 1957), так и наведенного гамма-излучения (Булашевич, Воскобойников, Музюкин, 1961) от концентрации определяемого химического элемента и переменного химического и минералогического состава среды.

В активационном каротаже содержание искомого элемента по величине интенсивности гамма-излучения его радиоактивного изотопа, образующегося в результате облучения нейтронами, равно  $P = I / K$ . Здесь  $I$  – измеряемая интенсивность гамма-излучения;  $K$  – пересчетный коэффициент, представляющий собой интенсивность гамма-излучения радиоактивного изотопа, полученную при активации руды с содержанием меди 1% и приведенную к стандартным условиям. Величина измеряемой интенсивности зависит от ряда факторов, в том числе от химического и минералогиче-

ского состава среды. Теоретические расчеты, подтвержденные скважинными исследованиями (Сенько-Булатный, Бахтерев, 1967; 1971), показали, что величина пересчетного коэффициента, являясь главным образом функцией суммарного содержания в медноколчеданных рудах меди, железа, цинка ( $P_{\Sigma} = P_{Cu} + P_{Fe} + P_{Zn}$ ), изменяется более чем 20 раз при переходе от вкрапленных руд к массивным. Поэтому количественная интерпретация диаграмм АК сводится к выбору величины пересчетного коэффициента, соответствующей данному интервалу разреза. Это приводит к необходимости регистрации дополнительного физического параметра, также являющегося функцией  $P_{\Sigma}$ . Теоретически и экспериментально установлено, что для колчеданных месторождений таким параметром является интенсивность рассеянного гамма-излучения, регистрируемая при проведении как селективного, так и плотностного гамма-гамма каротажа. При этом, как показали наши исследования, для подавляющего большинства руд лучшей является связь величины пересчетного коэффициента с интенсивностью рассеянного гамма-излучения, измеряемого при постановке селективного гамма-гамма каротажа (Сенько-Булатный, Бахтерев, Харус, 1971; Бахтерев, Сенько-Булатный, 1974; Бахтерев, 1987). При селективном гамма-гамма каротаже использована его модификация, при которой спектральная интенсивность рассеянного гамма-излучения регистрируется в области 65–80 кэВ. В указанном диапазоне энергий при переходе от сплошной медной руды к вмещающей породе (порфирит, диорит) спектральная интенсивность увеличивается в 30–40 раз. Кроме того, экспериментальные исследования показали, что использование спектрометрии предпочтительнее перед интегральным вариантом.

Преимущество селективного гамма-гамма каротажа в данном случае состоит в том, что измеряемая здесь интенсивность гамма-излучения зависит как от плотности, так и от эффективного атомного номера среды. Кроме того, в селективном гамма-

гамма каротаже при использовании источников мягкого гамма-излучения можно более полно экранировать детектор от прямого облучения и получать более четкие аномалии (Воскобойников, Балашев, Главчев, 1962).

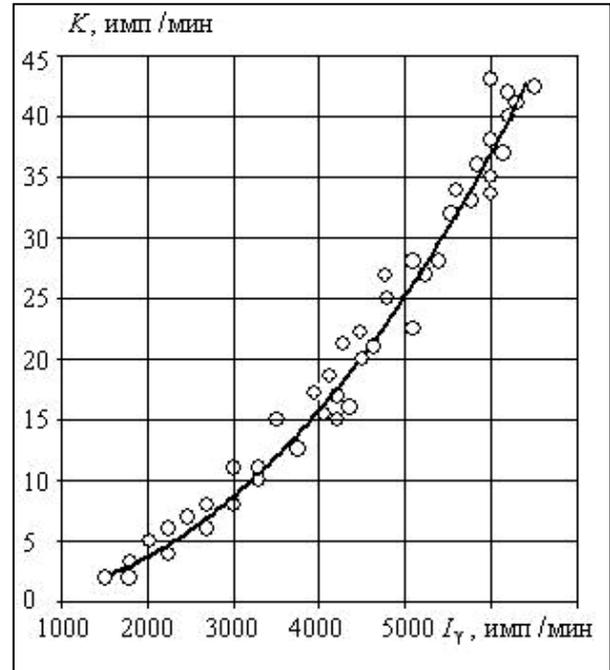


Рис. 7. Корреляционная связь между величиной пересчетного коэффициента и интенсивностью рассеянного гамма-излучения. Кружки – наблюдаемые значения  $K=f(I_{\gamma})$ , сплошная линия – кривая корреляции

На рис. 7 приведена полученная экспериментально на различных колчеданных месторождениях Урала и Башкирии корреляционная зависимость между величиной пересчетного коэффициента ( $K$ , имп/мин) и интенсивностью рассеянного гамма-излучения, измеренной при постановке селективного гамма-гамма каротажа ( $I_{\gamma}$ , имп/мин). Пересчетный коэффициент устанавливается в результате опытных исследований на месторождении путем сопоставления измеренных в процессе активационного каротажа интенсивностей гамма-излучения меди с данными геологического опробования керна. Корреляционное отношение  $\eta(I_{\gamma} / K)$  (Белинский и др., 1965), характеризующее тесноту корреляционной зависимости  $K$  от  $I_{\gamma}$ , равно 0,90. Корреляционное уравнение, устанавливающее связь между экспериментально полученными

значениями  $K$  от  $I_\gamma$  (рис. 7), вычисленное по способу Чебышева (Митропольский, 1971), имеет вид  $K = 0,038I_\gamma^2 + 0,205I_\gamma - 0,038$  с погрешностью  $\sigma = \pm 1,0\%$ . Среднее значение пересчетного коэффициента, равное 25 имп/мин, определяется с относительной погрешностью  $\pm 4\%$ . Новые экспериментальные данные, полученные на других месторождениях (изучено порядка 20 месторождений), подтвердили зависимость  $K = f(I_\gamma)$ , приведенную на рис. 7.

Оценивая величины погрешностей в определении пересчетного коэффициента, необходимо иметь в виду, что в измеряемые величины здесь не вводились никакие поправки на переменные скважинные условия, а данные геологического опробования принимались за истинные. Между тем, как это было показано неоднократно, например, в работах (Воскобойников, Балашев, Главчев, 1962; Бахтерев, Сенько-Булатный, Ахметшин, 1974), допущение об абсолютной достоверности данных геологического опробования оказывается неверным. Тем не менее, только использование зависимости  $K = f(I_\gamma)$  при количественной интерпретации гамма-спектрометрического активационного каротажа позволило получить результаты не менее достоверные по сравнению с данными геологического опробования.

### Литература

Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия / Под ред. К. Зигбана. М.: Атомиздат, 1969. Вып. 1. 567 с.

Бахтерев В.В. Экспериментальная проверка теории расчета спектра жесткого гамма-излучения радиоактивных изотопов, распределенных в горных породах // Ядерно-геофизические и геотермические исследования в рудной и региональной геофизике. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 30–32.

Бахтерев В.В. Исследование влияния переменного химического состава медных руд на измеряемую величину интенсивности гамма-излучения при нейтронной активации для повышения точности количественных определений меди // Ядерно-геофизические и геотермические исследования: Сб. науч. трудов. Свердловск: УНЦ

АН СССР, 1987. С. 55–64.

Бахтерев В.В., Сенько-Булатный И.Н. Комплекс ядерно-геофизических методов каротажа для определения содержания меди в скважинах // Разведка и охрана недр. 1974. № 2. С. 39–43.

Бахтерев В.В., Сенько-Булатный И.Н., Ахметшин Б.Х. Ядерно-геофизический метод бескернового определения меди в рудах колчеданных месторождений (методика и опыт применения) // Региональная, разведочная и промысловая геофизика. М.: ВИЭМС, 1974. Вып. 2. С. 18–29.

Бахтерев В.В., Сенько-Булатный И.Н., Харус Р.Л. К методике расчета спектра вторичного бета-излучения в кристалле йодистого натрия // Экспресс-информация. Серия: региональная, разведочная и промысловая геофизика. М.: ВИЭМС, 1977. № 5. С. 15–27.

Белинский В.А., Колихман И.Л., Майоров Л.Е., Митькин А.М. Высшая математика с основами математической статистики. М.: Высшая школа, 1965. 285 с.

Булашевич Ю.П. К теории интерпретации радиоактивных аномалий // Изв. АН СССР, серия географическая и геофизическая. 1946. № 5. С. 69–73.

Булашевич Ю.П. Об аномалиях в случае пластообразных возмущающих тел // Изв. АН СССР, серия геофизическая. 1955. № 3. С. 270–274.

Булашевич Ю.П., Воскобойников Г.М. Гамма-гамма каротаж на угольных месторождениях Урала и возможность бескернового бурения части разведочных скважин // Изв. АН СССР, серия геофизическая. 1957. № 1. С. 109–112.

Булашевич Ю.П., Воскобойников Г.М., Музюкин Л.В. Каротаж на рудных и угольных месторождениях с применением источников гамма-лучей и нейтронов // Радиоактивные изотопы и ядерные излучения в народном хозяйстве СССР. М.: Гостоптехиздат, 1961. С. 75–77. (Тр. Всес. совещ. в г. Риге. Т. 4).

Воскобойников Г.М. Интегральные уравнения и приближенные формулы для расчета интенсивности гамма-излучения в однородной излучающей среде // Геофизиче-

- ский сборник. Свердловск, 1957а. № 2. С. 152–161. (Тр. ГГИ УФАН СССР. Вып. 30).
- Воскобойников Г.М.* Интенсивность гамма-излучения в однородной излучающей среде // Геофизический сборник. Свердловск, 1957б. № 2. С. 162–172. (Тр. ГГИ УФАН СССР. Вып. 30).
- Воскобойников Г.М.* Теоретические основы селективного гамма-гамма-каротажа // Изв. АН СССР, серия геофизическая. 1957в. № 3. С. 351–362.
- Воскобойников Г.М.* К теории интерпретации данных гамма-каротажа в слоистых средах // Изв. АН СССР, серия геофизическая. 1960. № 2. С. 263–270.
- Воскобойников Г.М.* Спектр гамма-излучения монохроматического источника в однородной рассеивающей среде (численные данные) // Геофизический сборник. Свердловск, 1962. № 3. С. 3–5. (Тр. Ин-та геофиз. УФАН СССР. Вып. 2).
- Воскобойников Г.М.* Каротажный снаряд с автономно перемещающимся выносным блоком // Методические вопросы рудной геофизики Урала: Геофизический сборник. 1965. № 4. С. 207–211. (Тр. Ин-та геофиз. УФАН СССР. Вып. 3).
- Воскобойников Г.М., Балашев В.Н., Главчев П.А.* К вопросу о количественных определениях содержания тяжелых металлов по данным селективного каротажа // Геофизический сборник. Свердловск, 1962. № 3. С. 47–55. (Тр. Ин-та геофиз. УФАН СССР. Вып. 2).
- Воскобойников Г.М., Деев Л.Л.* Плотностной каротаж углеразведочных скважин // Разведка и охрана недр. 1956. № 10. С. 38–46.
- Воскобойников Г.М., Карташов Н.П.* К вопросу о спектрометрических исследованиях гамма-излучения естественных излучателей // Атомная энергия. 1959. Т. 6. Вып. 1. С. 42–48.
- Воскобойников Г.М., Уткин В.И., Бурдин Ю.Б.* Спектральные методы определения природы аномалий селективного каротажа // Изв. АН СССР, серия геофизическая. 1961. № 8. С. 1141–1149.
- Митропольский А.К.* Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.
- Сенько-Булатный И.Н., Бахтерев В.В.* К вопросу бескерновых количественных определений меди в рудах гамма-спектрометрическим активационным каротажом // Ядерно-геофизические исследования: Геофизический сборник. Свердловск: Ин-т геофиз. УФАН СССР, 1967. № 6. С. 21–27.
- Сенько-Булатный И.Н., Бахтерев В.В.* Количественный спектрометрический активационный каротаж // Состояние и перспективы развития геофизических методов на Урале. Свердловск, 1971. С. 37–48. (Тр. Ин-та геофиз. УНЦ АН СССР).
- Сенько-Булатный И.Н., Бахтерев В.В., Харус Р.Л.* Некоторые вопросы методики гамма-спектрометрических измерений в меднорудных скважинах // Ядерно-геофизические исследования: Геофизический сборник. Свердловск: Ин-т геофиз. УФАН СССР, 1967. № 6. С. 13–19.
- Сенько-Булатный И.Н., Бахтерев В.В., Харус Р.Л.* К вопросу о повышении надежности бескерновых количественных определений меди гамма-спектрометрическим активационным методом // Состояние и перспективы развития геофизических методов на Урале. Свердловск, 1971. С. 49–55. (Тр. Ин-та геофиз. УНЦ АН СССР).

## ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ АНОМАЛЬНЫХ МАСС В СТРУКТУРНЫХ ЗАДАЧАХ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ

**Федорова Н.В.** – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

**Аннотация.** Исследованы теоретические вопросы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий для горизонтально-слоистой среды. Источниками аномалий являются массы, расположенные между границей раздела и ее горизонтальной асимптотой. Показано, что аномальная масса определяется по значению вещественной части момента  $c_0$ . Остальные интегральные характеристики, в том числе центр тяжести, не возможно однозначно восстановить по комплексным моментам. Построены примеры границ раздела для случая, когда аномальная масса равна нулю.

*Гравитационная аномалия, магнитная аномалия, обратная задача, интегральная характеристика, граница слоя.*

### INTEGRAL CHARACTERISTICS OF ABNORMAL MASSES IN THE STRUCTURAL PROBLEMS OF GRAVIMETRY AND MAGNETOMETRY

*Fedorova N.V.* – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

**Abstract.** Theoretical questions of interpretation of gravity and magnetic anomalies, for a horizontally layered medium, were investigated. Sources of the anomalies are the masses located between the interface and the horizontal asymptote. It is shown that the anomalous mass is determined by the value of the real part of the  $c_0$  momentum. The rest of the integral characteristics, including the centre of gravity, cannot be uniquely identified from the complex momentums. Examples of boundaries for the case, when the anomalous mass is zero, were constructed.

*Gravity anomaly, magnetic anomaly, inverse problem, integral characteristic, layer boundary.*

#### **Введение**

Задачи гравиметрии и магнитометрии можно разделить по типам используемых модельных представлений об источниках аномалий на класс задач для ограниченных объектов и класс структурных задач для границ раздела горизонтально слоистых сред. Такое подразделение условно, поскольку в реальной геологической обстановке встречаются задачи, включающие в себя как отдельные блоки, с контрастными свойствами, так и структурные элементы, тем не менее, оно является удобным, так как для каждого класса задач требуются соответствующие комплексы методов обработки и интерпретации, а также разные подходы и идеи.

При исследовании ряда важнейших вопросов теории потенциала существенно прогресса удалось достичь, используя теорию функций комплексного переменного. В работах (Иванов, 1955, 1956; Цирульский, 1963, 1969; Голиздра, 1966; Страхов 1970а, б, в) был разработан специальный

аппарат для таких исследований. Основными составными частями этого аппарата, по нашему мнению, были: представление комплексной напряженности внешнего аномального поля и ее производных интегралами типа Коши, теория которых сравнительно проста и хорошо изучена; использование уравнений аналитических кривых в комплексных координатах

$z = f(z)$  (в геофизической литературе такое аналитическое представление контуров стали называть по имени А.В. Цирульского); интегральное уравнение В.К. Иванова, связывающее напряженность внешнего поля с функцией  $z(t)$ , реализующей конформное отображение единичного круга на границу источника поля – область  $D$ .

Разработанный аппарат позволил провести полное исследование вопросов об аналитическом продолжении внешнего потенциала  $u(z)$  внутрь возмущающей области (Цирульский, 1963, 1964; Цирульский, Сиротин, 1964), исследовать вопрос о связи особых точек внешнего потенциала и гра-

ницы области для вполне достаточного, с точки зрения геофизической практики, класса ограниченных односвязных областей с аналитическими или кусочно-аналитическими границами в случае постоянной или широкого класса переменных плотностей аномальных масс (Иванов, 1955; Цирульский, 1969; Никонова, Цирульский, 1975; Цирульский, Никонова, 1977). Выделены классы потенциалов, для которых обратная задача разрешима в конечном виде (по терминологии В.К. Иванова) (Рапопорт, 1940; Иванов, 1955; Цирульский, Никонова, 1975).

Для структурных задач В.Н. Страхов получил весьма важное представление для внешнего поля от границы раздела в виде интеграла типа Коши, а также аналог интегрального уравнения В.К. Иванова (Страхов, 1972). Был исследован ряд важных аспектов задачи о контактной поверхности. В частности, получен ряд представлений внешнего потенциала, удобный для решения прямой задачи; проведено достаточно полное исследование вопроса об аналитическом продолжении внешнего поля через границу раздела горизонтальных сред, связи особенностей такого продолжения с геометрией границы раздела; получены условия, при которых имеет место единственность решения обратной задачи для границ раздела, имеющих слева и справа одну и ту же горизонтальную асимптоту (Страхов, 1972, 1974). На частном примере границ раздела в форме конхоид Слюза было установлено, что при решении обратной структурной задачи имеет место двухпараметрическая неоднозначность в отличие от однопараметрической неоднозначности для ограниченных областей.

В работе (Федорова, Цирульский, 1976) показано, что для границ раздела обратная задача гравиметрии двухпараметрически неоднозначна для широкого класса потенциалов, а обратная задача магнитометрии имеет трехпараметрическую неоднозначность. Для структурной задачи магнитометрии по внешнему полю нельзя найти направление намагниченности аномальных масс в отличие от обратной зада-

чи для ограниченной области. Таким образом, были выявлены существенные отличия обратных задач для класса, ограниченных по размерам источников, от класса границ горизонтально слоистых сред (Федорова, Цирульский, 1978).

Одним из важнейших направлений при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий являются методы нахождения особых точек аномальных полей и интегральных характеристик источников. Для ограниченных областей в окрестности бесконечно удаленной точки для комплексной напряженности внешнего гравитационного поля  $u(z)$  справедливо разложение в следующий ряд Лорана

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}, \quad (1)$$

где  $c_k$  – комплексные (или гармонические) моменты однозначно определяют внешнее поле, и сами однозначно определяются по этому внешнему полю. Кроме того, они содержат важную информацию об источниках аномальных полей – интегральные характеристики источников. Например,

$$M = \pi c_0, \quad z_{ц.м.} = c_1/c_0, \quad l = \sqrt{\frac{c_2(z_{ц.м.})}{c_0}}, \quad (2)$$

$\theta = 0,5 \arg \{c_2(z_{ц.м.})/c_0\}$ , где  $M$  – аномальная масса, поэтому  $\text{Im} c_0 = 0$ ;  $z_{ц.м.}$  – координаты центра тяжести;  $l$  – параметр, характеризующий вытянутость тела;  $\theta$  – угол, составленный длинной осью тела с координатной осью  $Ox$ .

Впервые методы определения интегральных характеристик возмущающих масс были разработаны в работах (Гамбурцев, 1936, 1938). В последствии эти методы развивались и обобщались разными геофизиками (Заморев, 1939; Заборовский, 1940; Шванк, Люстих, 1947; Иванов, 1950; Казанский, 1951; Гравиразведка, 1968; Страхов, Лапина, 1975 и др.).

Значительный вклад в развитие теории и методов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий внес Георгий Митрофанович Воскобойников. Он предложил эффективный метод поиска особых точек. Совместно с учениками были разработаны

алгоритмы и программы для двумерного случая (Воскобойников, Начапкин, 1969, 1980) и позднее для трехмерных геофизических полей (Воскобойников, Шестаков, 1982).

Для класса структурных задач для комплексной напряженности внешнего поля  $u(z)$  также справедливо разложение в ряд (1). Однако нами было показано, что для бесконечных границ раздела слоистых сред коэффициент  $c_0$  может быть комплексным (Федорова, Цирульский, 1976). Следовательно, получалось, что  $c_0$  не может соответствовать такой физической величине, как масса аномального источника.

Г. М. Воскобойников в это время возглавлял лабораторию математической геофизики. Когда возникла дискуссия, о том может ли момент  $c_0$  принимать комплексные значения или необходимо ввести ограничение на этот параметр, Георгий Митрофанович принял в ней непосредственное участие и произнес фразу: «За каждым математическим результатом должен быть физический смысл». Поэтому мною были проведены исследования, и в диссертационной работе появился раздел «О величине и физическом смысле комплексных моментов для границ раздела» (Федорова, 1980). Поскольку ранее результаты этих исследований не были полностью опубликованы, то, пользуясь случаем вспомнить выдающегося ученого, учителя многих уральских геофизиков Георгия Митрофановича Воскобойников, его лаконичные и точные высказывания, посвящая ему эту работу.

**Комплексные моменты для границ раздела**

Рассмотрим в комплексной системе координат  $z=x+iy$  модель среды, состоящей из двух слоев постоянной плотности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , разделенных простой непрерывной жордановой кривой  $L$ , которая имеет одну и ту же горизонтальную асимптоту  $y=h$  слева и справа. Верхний слой ограничен прямой  $y=h_1$  ( $h_1<0$ ), а снизу – кривой  $L$ . Нижний слой ограничен сверху кривой  $L$ , а снизу – прямой  $y=h_2$  ( $h_2<h_1<0$ ). При  $y>h_1$  и  $y<h_2$  массы отсутствуют (рис. 1). Аномаль-

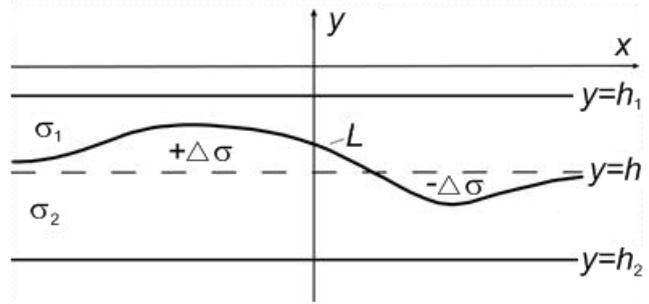


Рис. 1. Модель среды

ное поле рассматриваемой среды есть поле масс плотности  $\pm\Delta\sigma=\pm(\sigma_2-\sigma_1)$ , распределенных между кривой  $L$  и асимптотой, при этом плотность масс для точек, лежащих выше асимптоты, равна  $+\Delta\sigma$ , а для точек, лежащих ниже асимптоты,  $-\Delta\sigma$ .

Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности состоит в определении величины  $\Delta\sigma$  и кривой  $L$  по заданному внешнему аномальному полю.

Обозначим через  $D_R^h$  – класс регулярно аналитических, а через  $D_{KR}^h$  – класс кусочно регулярно аналитических границ раздела с горизонтальными асимптотами. Пусть  $L \in D_R^h$ . Обозначим через  $u(z)$  комплексную напряженность гравитационного поля:

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}(V_x - iV_y),$$

где  $V(x,y)$  – внешний логарифмический потенциал. Функция  $u(z)$  содержит всю информацию о потенциале и может исследоваться вместо последнего.

В работе (Страхов, 1972) показано, что с точностью до постоянного слагаемого для точек, лежащих выше прямой  $y=h_1$ ,  $z \in D^-$ , справедливо следующее представление для  $u(z)$ :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Delta\sigma[f(\xi) - \xi + 2ih]}{\xi - z} d\xi, \tag{3}$$

где  $f(z) = \bar{z}$  – уравнение  $L$  в комплексных координатах (Цирульский, 1963).

Обозначим часть плоскости, лежащую ниже границы  $L$ , через  $D^+$ , а часть плоскости, лежащую выше  $L$ , через  $D^-$ . Тогда существует функция  $z(t)$ , реализующая конформное отображение нижней полуплос-

кости  $T^+$  вспомогательной комплексной плоскости  $t$  на  $D^+$ , причем

$$z(t) = t + ih + \Psi(t), \quad (4)$$

где  $\psi(t)$  – аналитическая в  $T^+$  и регулярная на бесконечности;  $\psi(\infty)=0$ ,  $z(\infty)=\infty$ ,  $z'(\infty)=1$ .

Пусть  $u(z)$  – комплексная напряженность внешнего гравитационного поля границы раздела  $L$  ( $L \in D_R^h$ ). Пусть функция  $z(t)$ , определяемая (4), имеет на бесконечности полюс первого порядка, следовательно, и  $f(z(t)) = z(t)$  будет иметь на бесконечности полюс первого порядка, а функция  $f(z) - z - 2ih$  будет регулярно аналитической на бесконечности.

В этом случае основное интегральное представление (3) может быть заменено следующим (Страхов, 1972)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{\Delta\sigma[f(\xi) - \xi + 2ih]}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{\Delta\sigma f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D^-. \quad (5)$$

Тогда

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{\Delta\sigma f'(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D^-, \quad (6)$$

где  $\Omega$  – замкнутый контур следующего вида: он состоит из принадлежащей  $D^+$  дуги окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат и части  $L$ , соединяющей концы дуги окружности в  $D^+$ . Радиус  $R$  должен быть взят столь большим, чтобы все особенности  $f(z)$  в  $D^+$  находились внутри контура  $\Omega$ . Из представления (5) следует, что для  $u(z)$  разложение (2) также справедливо в окрестности бесконечно удаленной точки в верхней полуплоскости, причем для коэффициентов  $c_k$  справедливы следующие формулы

$$c_k = \frac{\Delta\sigma}{2\pi i} \int_{\Omega} f(\xi) \xi^k d\xi \quad (7)$$

или

$$c_k = \frac{\Delta\sigma}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{f(\xi) \xi^{k+1}}{k+1} d\xi. \quad (8)$$

Проведем замену переменной  $\xi = \xi(t)$  в (5), (6), (7) и (8), получим

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_T} \frac{\Delta\sigma \Psi^*(t) z'(t)}{z(t) - z} dt, \quad (9)$$

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_T} \frac{\Delta\sigma [\Psi^*(t)]' z'(t)}{z(t) - z} dt, \quad (10)$$

$$c_k = \frac{\Delta\sigma}{2\pi i} \int_{\Omega_T} \Psi^*(t) z^k(t) z'(t) dt, \quad (11)$$

$$c_k = \frac{\Delta\sigma}{2\pi i} \int_{\Omega_T} \frac{[\Psi^*(t)]' z^{k+1}(t) z'(t)}{k+1} dt, \quad (12)$$

где  $\Omega_T = \{t: z(t) \in \Omega\}$ ,  $\Psi^*(t) = \overline{\Psi(t)}$ .

Исследуем теперь вопрос о том, какие значения могут принимать коэффициенты  $c_k$ , и как они связаны с интегральными характеристиками масс, распределенными между контактной границей  $L$  и ее асимптотой  $y=h$ .

Функция  $z(t)$ , реализующая конформное отображение нижней полуплоскости  $T^+$  вспомогательной комплексной плоскости  $t$  на  $D^+$ , имеет вид (4)  $z(t) = t + ih + \Psi(t)$ , где  $\psi(t)$  – аналитическая в  $T^+$  и регулярная на бесконечности;  $\psi(\infty)=0$ ,  $z(\infty)=\infty$ ,  $z'(\infty)=1$ . Поэтому всегда можно построить окружность достаточно большого радиуса  $R$  с центром в точке  $a$ , целиком лежащую в верхней полуплоскости, внутри которой будут находиться все особые точки функции  $\psi(t)$ . Тогда вне этой окружности для  $\psi(t)$  справедливо следующее представление:

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(t-a)^k}, \quad \text{Im} a > 0 \quad (13)$$

$$z(t) = t + ih + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(t-a)^k}, \quad (14)$$

$$z'(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA_k}{(t-a)^{k+1}}, \quad (15)$$

$$z^*(t) = t - ih + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(t-a)^k}. \quad (16)$$

Вычислим по формуле (11) коэффициент  $c_0$ :

$$c_0 = \frac{\Delta\sigma}{2\pi i} \int_{\Omega_T} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{A_k}}{(t-a)^k} \right] \times \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA_k}{(t-a)^{k+1}} \right] dt. \quad (17)$$

Преобразуем дробь

$$\frac{1}{(t-a)^{k+1}} = \frac{1}{(\overline{a}-a)^{k+1}} \left[ 1 + \frac{t-a}{\overline{a}-a} \right]^{-k-1} = \frac{1}{(\overline{a}-a)^{k+1}} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (k+m)!}{k!m!} \left( \frac{t-\overline{a}}{\overline{a}-a} \right)^m \right].$$

Тогда интеграл (17) по теории вычетов будет равен коэффициенту при  $t^{-1}$  подинте-

гальной функции, помноженному на  $2\pi i$ .  
То есть получим

$$c_0 = \Delta\sigma[\bar{A}_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (k+m+1)! \bar{A}_k A_m}{(k-1)!(m-1)!(\bar{a}-a)^{k+m}}]. \quad (18)$$

Отсюда видно, что коэффициент  $c_0$  может быть комплексным для границ раздела. Причем  $c_0$  – комплексное число только в том случае, когда  $A_1$  комплексное число, поскольку все члены двойного ряда в (18) чисто вещественные,

$$\text{Im}c_0 = -\Delta\sigma \text{Im}A_1 \quad (19)$$

В этом заключается одно из характерных отличий задачи о границах раздела от задачи об ограниченной области.

Построим примеры границ раздела с вещественными и комплексными моментами  $c_0$ .

*Пример 1.* Пусть граница раздела описывается уравнением, которое имеет особенность – полюс первого порядка

$$z(t) = t + ih + \frac{A}{t-a}, \quad \text{Im} a > 0 \quad (20)$$

$$z'(t) = 1 - \frac{A}{(t-a)^2}.$$

Вычислим  $u(z)$  по формуле (9)

$$u(z) = \frac{B}{z-b}, \quad (21)$$

причем значение коэффициента  $B$  и положение точечного источника  $b$  определяются из уравнений

$$z(\bar{a}) = b, \quad \Delta\sigma \bar{A} \left[ 1 - \frac{A}{(a-a)^2} \right] = B. \quad (22)$$

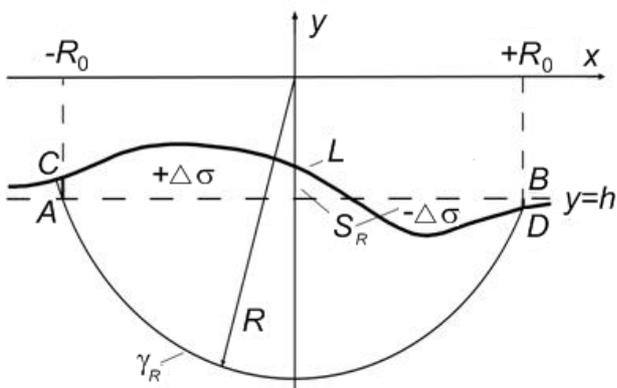


Рис. 2. К вопросу о комплексных моментах

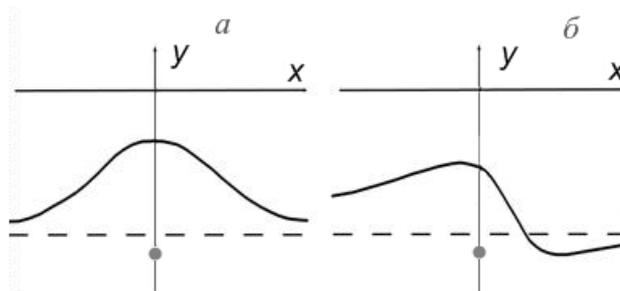


Рис. 3. Границы раздела  $z(t) = t + ih + \frac{A}{t-a}$ , эквивалентные точечному источнику:  $a - c_0$  – вещественное число;  $b - c_0$  – комплексное число

Из (21) видно, что  $c_0 = B$ , а из (22), что  $B$  вещественно, если вещественно  $A$ .

На рис. 3 приведены границы раздела с вещественным и комплексным моментами  $c_0$ .

*Пример 2.* Пусть теперь граница раздела описывается уравнением с особенностями логарифмического типа

$$z(t) = t + ih + A[\ln(t-a) - \ln(t-b)], \quad \text{Im} a > 0, \text{Im} b > 0. \quad (23)$$

Тогда

$$z^*(t) = t - ih + \bar{A}[\ln(t-\bar{a}) - \ln(t-\bar{b})],$$

$$z'(t) = 1 + A \left[ \frac{1}{t-a} - \frac{1}{t-b} \right],$$

$$[z^*(t)]' = 1 + \bar{A} \left[ \frac{1}{t-\bar{a}} - \frac{1}{t-\bar{b}} \right].$$

Вычислим по формуле (10)  $u'(z)$  и затем  $u(z)$

$$u(z) = B[\ln(z-c) - \ln(z-d)], \quad (24)$$

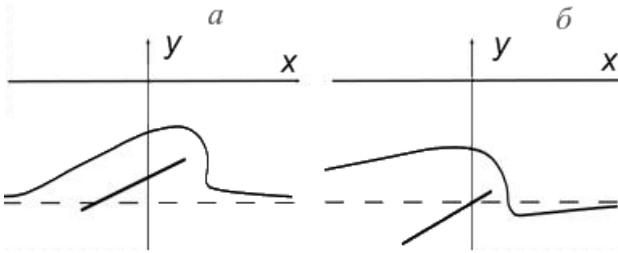
причем значения коэффициента  $B$  и координаты  $c, d$  концов сингулярного отрезка определяются из уравнений

$$B = \Delta\sigma \bar{A}, \quad c = z(\bar{a}), \quad d = z(\bar{b}). \quad (25)$$

Из (12) следует, что  $c_0 = B(d-c)$  и  $c_0$  вещественное, если параметры отображающей функции удовлетворяют условию:

$$\text{Im} \left\{ \bar{A}(\bar{b}-\bar{a}) + A \ln \frac{(\bar{b}-a)(\bar{a}-b)}{(b-b)(\bar{a}-a)} \right\} = 0.$$

Границы раздела с вещественным и комплексным моментами  $c_0$  приведены на рис. 4. В обоих примерах при вещественном значении  $c_0$  кривая выходит на асимптоту с одной стороны (либо выше, либо ниже



**Рис. 4.** Границы раздела  $z(t) = t + ih + A[\ln(t-a) - \ln(t-b)]$ , эквивалентные материальному отрезку:  $a - c_0$  – вещественное число;  $b - c_0$  – комплексное число

асимптоты). При комплексном  $c_0$ , при стремлении  $x$  к бесконечности, граница раздела справа и слева выходит на асимптоту с разных сторон. Эту закономерность легко установить в общем случае.

Пусть  $z(t)$  имеет вид (14). Без нарушения общности можно положить, что  $a = id, d > 0$ . Тогда для  $|t| \gg d$

$$\text{Im } z(t) - h = I \frac{\text{Im } A_1}{t} + \frac{d \text{Re } A_1 + \text{Im } A_2}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right), \quad (26)$$

$$\text{Re } z(t) = t + \frac{\text{Re } A_1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Учитывая (19)  $\text{Im } c_0 = -\Delta\sigma \text{Im } A_1$ , в (26) получаем, что стремление к асимптоте по закону  $1/t$  будет только в том случае, если  $c_0$  – комплексное.

Возникает вопрос: какой физический смысл имеет комплексный момент  $c_0$  для границ раздела? Преобразуем формулу (7), разделив контур  $\Omega$  на две части

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \Delta\sigma [f(\xi) - \xi + 2ih] \xi^k d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \Delta\sigma [f(\xi) - \xi + 2ih] \xi^k d\xi, \quad (27)$$

где  $L_R$  – часть кривой  $L$ , отсекаемой окружностью;  $\gamma_R$  – принадлежащая  $D^+$  дуга этой окружности.

Рассмотрим следующий интеграл

$$I_k^R = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_R} \Delta\sigma f(\xi) \xi^k d\xi,$$

где  $S_R$  – замкнутый контур, который состоит из отрезка прямой  $y=h$ , дуги кривой  $L$ , проекция которой на асимптоту  $y=h$  есть отрезок  $AB$ , и отрезков вертикальных прямых  $x=+R_0$  и  $x=-R_0$ , соединяющих точки  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $D$  на границе  $L$  и асим-

птоте (см. рис. 2). Применяя к интегралу формулу Грина, легко найдем, что

$$I_k^R = \frac{1}{\pi} \iint_{D_R} \Delta\delta(\zeta, \eta) \xi^k d\zeta d\eta, \quad (28)$$

где  $\Delta\delta(\zeta, \eta) = +\Delta\sigma$  для точек области  $D_R$ , расположенных выше  $y=h$ , и  $\Delta\delta(\zeta, \eta) = -\Delta\sigma$  для точек, расположенных ниже асимптоты. Область  $D_R$ , ограниченная контуром  $S_R$ , в общем случае многосвязная и состоит из соприкасающихся, но не пересекающихся односвязных областей, заполненных массами постоянной плотности  $\pm \Delta\sigma$ . Выражение (28) определяет комплексные моменты масс, распределенных по конечным областям.

Обозначим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_k^R = c_k^D,$$

тогда, как и в случае ограниченных областей, выполняются соотношения (2), т. е.

$$M = \pi c_0^D, \quad z_{u.m.} = c_1^D / c_0^D \text{ и др.}$$

Для точек на прямой  $y=h$  имеем  $\bar{z} - z + 2ih = 0$ , следовательно, осуществляя предельный переход при  $R \rightarrow \infty$ , легко показать, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_k^R = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Delta\sigma [f(\xi) - \xi + 2ih] \xi^k d\xi.$$

Рассмотрим теперь интеграл по дуге окружности

$$\Gamma_k^R = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \Delta\sigma [f(\xi) - \xi + 2ih] \xi^k d\xi.$$

Сделаем замену переменных  $z = z(t)$  и подставим (14), (15) и (16)

$$\Gamma_k^R = \frac{\Delta\sigma}{2\pi i} \int_{-R_0}^R \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_k}{(t-\bar{a})^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(t-a)^k} \right] \times \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kA_k}{(t-a)^{k+1}} \right] \left[ t + ih + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(t-a)^k} \right]^k dt.$$

Известно, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \Gamma_k^R = 0$  в случае, когда для подинтегральной функции справедлива оценка

$$|F(t)| < \frac{K}{|t|^{1+\varepsilon}},$$

где  $K, \varepsilon$  – некоторые положительные числа (Свешников, Тихонов, 1967). Однако в рас-

смаатриваемом случае это условие не выполняется.

Для  $k=0$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \Gamma_0^R = -i\Delta\sigma \text{Im} A_1$ , (29)

$k=1$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \Gamma_1^R = \Delta\sigma [\bar{A}_1(\bar{a}+ih) + \bar{A}_2] - [A_1(a+ih) + A_2]$ .

Обозначим

$\lim_{R \rightarrow \infty} m_k^R = m_k$ ,

тогда из (27) и (28) следует, что

$c_k = c_k^D + m_k$ . (30)

Следовательно, комплексные моменты для границы раздела равны комплексным моментам аномальных масс, распределенных между границей и ее асимптотой  $y=h$ , плюс некоторые величины  $m_k$ , которые возникают из-за того что граница  $L$  не замкнута. Для  $k=0$   $\text{Re}c_0=M/\pi$  и  $\text{Im}c_0=\Delta\sigma\text{Im}A_1$ , то есть действительная часть  $c_0$  позволяет определить аномальную массу, а мнимая – характеризует закон стремления границы  $L$  к асимптоте. При комплексном  $c_0$  граница медленно стремится к асимптоте по закону  $1/x$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  и расположена по разные стороны от асимптоты. Если  $\text{Im}c_0=0$ , граница стремится к асимптоте по закону  $1/x^2$  или еще быстрее.

Центр тяжести аномальных масс для границ раздела по комплексным моментам однозначно не восстанавливается, используя (3), (29) и (30) легко показать, что даже в случае  $\text{Im}c_0=0$  можно определить только абсциссу центра тяжести.

Для границ раздела можно построить примеры, когда аномальная масса равна нулю (рис. 5).

Как было показано, момент  $c_0$  для границ раздела в гравиметрии может быть

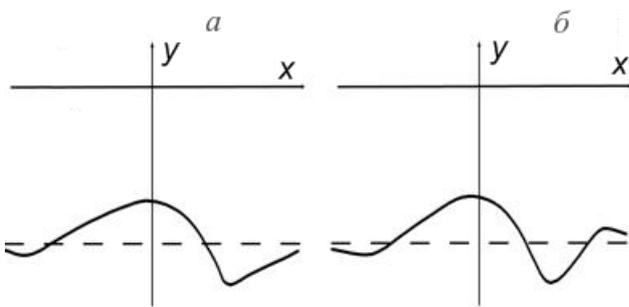


Рис. 5. Границы раздела  $z(t) = t + ih + \frac{A_1}{t-a} + \frac{A_2}{(t-a)^2}$

с нулевой суммарной аномальной массой:

$a - c_0=0$ ;  $б - c_0=i$

комплексным числом, то есть  $c_0 = |c_0|e^{i\varphi_1}$ , где  $\varphi_1$  – аргумент кривой  $L$  (в случае, если  $L$  замкнутая ограниченная кривая,  $\varphi_1=0$ ). Из исследований, проведенных в работе, следует важный вывод о том, что всякий потенциал от ограниченной области есть одновременно и потенциал некоторой границы раздела. Но не наоборот, всякий потенциал от границы раздела есть одновременно и потенциал ограниченной области.

При интерпретации магнитных аномалий в окрестности бесконечно удаленной точки для комплексной напряженности внешнего магнитного поля  $u(z)$  справедливо разложение в следующий ряд Лорана

$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+2}}$ . (31)

Для ограниченных областей момент  $c_0$  позволяет находить магнитный момент возмущающих масс  $M=\pi c_0$ ,  $c_0 = |c_0|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ ,  $\varphi_1$  – аргумент кривой  $L$  (в случае, если  $L$  замкнутая ограниченная кривая,  $\varphi_1=0$ ) и  $\varphi_2$  – направление намагниченности объекта. Следовательно, по внешнему полю в можно определить направление намагниченности аномальных масс.

В структурных задачах,  $\varphi_1 \neq 0$ , и поэтому направление намагниченности аномальных масс нельзя определить. Ранее этот результат был опубликован в работе (Федорова, Цирульский, 1976), и построен пример эквивалентных по внешнему полю границ, имеющих одинаковые параметры: модуль скачка намагниченности и асимптоту, но разные направления намагниченности. Центр тяжести возмущающих масс, расположенных между границей и асимптотой, нельзя определить однозначно по значениям комплексных моментов.

**Заключение**

Проведенные исследования показали, что для гравитационных и магнитных аномалий комплексные моменты  $c_k$  в представлении внешних полей (1) и (31) не позволяют однозначно восстанавливать интегральные характеристики аномальных масс, распределенных между границей раздела и ее асимптотой, за исключением ано-

мальной массы. Момент  $c_0$  для границ раздела может быть комплексным. Это позволяет в случае, если  $c_0$  – комплексное число, искать решение обратной задачи гравиметрии только в классе границ раздела. Для случая, если  $c_0 > 0$ , решение обратной задачи возможно как в классе границ раздела, так и в классе ограниченных областей.

Границы с комплексным  $c_0$  медленно стремятся к асимптоте и с разных сторон слева и справа от нее (см. рис. 3б и рис. 4б). Поэтому на практике использование таких границ раздела позволяет аппроксимировать границы не только из классов  $D_R^h$  и  $D_{KR}^h$ , но в пределах изучаемого участка можно достаточно хорошо аппроксимировать границы в виде уступов или надвигов, которые имеют слева и справа разные асимптоты.

### Литература

Воскобойников Г.М., Начапкин Н.И. Метод особых точек для интерпретации потенциальных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. № 5. 1969. С. 24–39.

Воскобойников Г.М., Начапкин Н.И. Методические рекомендации по применению метода особых точек для интерпретации потенциальных полей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. 130 с.

Воскобойников Г.М., Шестаков А.Ф. Метод гасящих функций и его применение для определения особых точек геофизических полей, удовлетворяющих трехмерным уравнениям Лапласа и Гельмгольца // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 3. С. 62–75.

Гамбурцев Г.А. Определение центра тяжести возмущающего тела по гравитационным наблюдениям // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1938. № 4. С. 307–315.

Гамбурцев Г.А. Прямые методы интерпретации // Прикладная геофизика. 1936. Вып. 1. С. 176–182.

Голыздра Г.Я. Особые точки аналитического продолжения гравитационного поля и их связь с формой возмущающих масс // Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. Новосибирск: НГУ, 1966. 560 с.

Гравиразведка. Справочник геофизика. Т. V. / Под ред. Е.А. Мудрецовоы. М.: Недра, 1968. 512 с.

Заборовский А.И. К методике интерпретации магнитных аномалий // Труды МГРИ, 1940. Т. 20. С. 275–277.

Заморев А.А. Об определении производных гравитационного потенциала и соотношения между моментами возмущающих масс по производной, заданной на плоскости // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1939. № 3. С. 487–500.

Иванов В.К. Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала // ДАН СССР. 1955. Т. 105. № 3. С. 409–411.

Иванов В.К. О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // ДАН СССР. 1956. Т. 106. № 4. С. 598–599.

Иванов В.К. Об определении гармонических моментов возмущающих масс по производной гравитационного потенциала, заданной на плоскости // Изв. АН СССР. Сер. Геогр. и геофиз. 1950. № 5. С. 403–414.

Казанский А.П. Определение сечения и глубины залегания намагниченных тел по измерениям магнитного поля // Геофизические методы поисков полезных ископаемых. М.: Госгеоиздат, 1951. С. 3–15.

Никонова Ф.И., Цирульский А.В. К вопросу о граничных особых точках логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 6. С. 76–80.

Рапопорт И.Н. О плоской обратной задаче теории потенциала // ДАН СССР. 1940. Т. 28. № 4. С. 305–307.

Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной // М.: Наука, 1967. 304 с.

Страхов В.Н. К вопросу о единственности решения плоской обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1972. № 2. С. 38–49.

Страхов В.Н. К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. № 6. С. 39–60.

Страхов В.Н. К теории плоской обратной задачи магнитного потенциала при пере-

менной намагниченности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1970а. № 3. С. 44–58.

*Страхов В.Н.* Некоторые вопросы плоской обратной задачи магнитного потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1970б. № 9. С. 31–41.

*Страхов В.Н.* Некоторые вопросы плоской задачи гравиметрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1970в. № 12. С. 32–44.

*Страхов В.Н., Лапина М.И.* Определение интегральных характеристик возмущающих масс аппроксимационным методом в задачах гравиметрии и магнитометрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 4. С. 35–58.

*Федорова Н.В.* Прямые и обратные задачи для границ раздела // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Институт геофизики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. 128 с.

*Федорова Н.В., Цирульский А.В.* К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности в конечном виде // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 10. С. 61–72.

*Федорова Н.В., Цирульский А.В.* Об обратной задаче для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 3. С. 38–47.

*Цирульский А.В.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969. № 6. С. 60–65.

*Цирульский А.В.* О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала однородной области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 7. С. 1072–1075.

*Цирульский А.В.* О связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. № 11. С. 1693–1696.

*Цирульский А.В., Никонова Ф.И.* К вопросу о разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 5. С. 37–47.

*Цирульский А.В., Никонова Ф.И.* К вопросу о теоретическом решении обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // Теория и практика применения аналитических методов интерпретации и математического моделирования геофизических полей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С. 31–39.

*Цирульский А.В., Сиротин М.И.* К вопросу об аналитическом продолжении логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. № 1. С. 105–109.

*Шванк О.А., Люстюх Е.Н.* Интерпретация гравитационных наблюдений. М.; Л.: Гостоптехиздат, 1947. 400 с.

## ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ В ПОСТАНОВКЕ Г.М. ВОСКОБОЙНИКОВА

*Хачай О.А.* – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

**Аннотация.** Статья посвящена изложению теоретических результатов решения единой обратной задачи электромагнитных зондирований для одномерной среды, полученных под руководством Г.М. Воскобойникова, воспоминаниям о своем учителе.

*Электромагнитные зондирования, одномерная среда, единый оператор решения обратной задачи, алгоритм регуляризации, одномерная интерпретация.*

### ABOUT ELECTROMAGNETIC SOUNDINGS INTERPRETATION AFTER VOSKOBONNIKOV'S STATEMENT

*Hachay O.A.* – Institute of geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

**Abstract** The paper is devoted to present theoretical results of joined inverse problem solution for electromagnetic soundings in layered medium, which had been obtained under the direction of G.M. Voskobonnikov, to memory of my teacher.

*Electromagnetic soundings, 1-d medium, joined operator of inverse problem solution, algorithms of regularization and 1-d interpretation.*

#### **Введение**

Я поступила в аспирантуру в 1969 году к моему учителю Г.М. Воскобойникову, д.ф.-м.н., зав. лаб. математической геофизики после окончания физического факультета Уральского государственного университета по специальности астрофизика. Когда он узнал, что я занималась проблемой численного моделирования фотосфер звезд – голубых сверхгигантов, то сразу произнес свое решение: «Вы будете заниматься проблемой моделирования и решения обратных задач для электромагнитных полей. Сам я этой проблемой не занимаюсь, но надеюсь, что Вам это будет интересно». Так возникла тема: «Обратная задача электромагнитных зондирований для одномерной среды», которую я защитила в виде кандидатской диссертации в 1979 г.

10 лет моей жизни пролетели как один год, потому что они связывали меня с интереснейшим человеком: ученым с большой буквы, исследователем, порядочным и наичестнейшим человеком. Поэтому я хотела бы поподробнее вспомнить и рассказать об этом процессе нашего взаимодействия.

Все известные подходы к интерпретации аномалий электромагнитного поля включают в себя предположение о том, что геоэлектрические параметры нормального

разреза известны. Поэтому в то время, да и в настоящее время чрезвычайно актуально теоретическое и методическое рассмотрение вопроса об определении параметров нормального разреза, используя тот же набор входных электромагнитных данных и учитывая, что априорная информация о параметрах нормального разреза, как правило, бывает приближенной. С другой стороны, формальная интерпретация в рамках модели одномерной среды данных переменного электромагнитного поля, содержащих влияния всевозможных искажений локальных неоднородностей, приводит к непрогнозируемым ошибочным результатам.

В книге М.Н. Бердичевского и М.С. Жданова (Бердичевский, Жданов, 1981) теоретически рассмотрена задача об определении параметров нижележащей одномерной среды под слоем с известной мощностью и заданной проводимостью по данным, заданным на площади и на ряде частот пяти компонент переменного электромагнитного поля. Однако этот подход тоже требует априорной информации о геоэлектрических параметрах приповерхностного слоя. В работе (Weidelt, 1972) П. Вайдельтом показано, что оператор решения одномерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования – самосопряженный оператор (Наймарк, 1969), при этом в качестве вход-

ных данных используются комплексные значения импеданса как функции частоты. С другой стороны, в работах, в частности (Агранович, 1974, 1975, 1977; Войтович, Каценеленбаум, Сивов, 1977), показано, что в общем случае задачи дифракции двумерного или трехмерного переменного электромагнитного поля на локальных неоднородностях описываются несамосопряженными операторами. Однако существует небольшое количество частных задач, приводящихся к самосопряженному оператору при определенном выборе функций, описывающих свойства среды и входящих в граничные условия задачи (Агранович, 1977). Спектральные свойства дифференциальных операторов рассмотрены достаточно подробно в математической литературе, например (Безанский, 1965; Гохберг, Крейн, 1965; Хермандер, 1965; Weidelt, 1972).

Здесь требуется небольшое отступление, связанное с методами работы Г.М. Воскобойникова. Он понимал, что если говорить о **количественной** интерпретации геофизических полей, то должна быть корректно сформулирована обратная задача, и методы ее решения должны опираться на современные методы математической физики. Как правило, эти методы читались физикам в очень сжатом виде, а книги перечисленных в библиографии авторов – известных математиков, оставались за пределами читаемых курсов. Однако любимое выражение Георгия Митрофановича: «Спасение утопающих – дело рук самих утопающих», – быстро приводило в чувство, и я по необходимости и с новой кипучей энергией вгрызалась в гранит математических наук.

Как следует из теории, спектральные свойства самосопряженных и несамосопряженных операторов различны. Благодаря этому математическому результату и результату, изложенному в работе (Weidelt, 1972), осуществлена регуляризация решения одномерной обратной задачи магнитотеллурики (Хачай 1978, 1980) с использованием идеи, высказанной В.Н. Страховым (Страхов, 1969), о

фильтрации наблюдаемых данных в область определения оператора решения обратной задачи. Кроме того, в работе (Хачай, 1980) удалось распространить результат П. Вайдельта (Weidelt, 1972) сведения задачи электромагнитного зондирования одномерной среды с произвольным источником, расположенным вне Земли, к задаче с однородным возбуждением на случай искусственных дипольных источников, расположенных на поверхности Земли. Это позволило построить единый метод определения параметров нормального разреза по данным электромагнитного зондирования для наиболее часто применяемых в геофизической практике типов источников поля: горизонтального электрического диполя, вертикального магнитного диполя и плоской однородной волны.

Рассмотрим более подробно результаты решения поставленной Г.М. Воскобойниковым проблемы: единая обратная задача электромагнитных зондирований для одномерной среды.

**Математическая постановка единой обратной задачи электромагнитных зондирований одномерной среды**

Задачу электромагнитного зондирования будем рассматривать для одномерной среды (проводимость  $\sigma$  есть функция только координаты  $z$ , ось  $OZ$  направлена вниз) с постоянной магнитной восприимчивостью  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м в квазистационарном приближении. Рассмотрим три типа источников возбуждения электромагнитного поля: однородную плоскую электромагнитную волну, вертикальный магнитный диполь и горизонтальный электрический диполь. Зависимость от времени выберем в виде  $\exp(i\omega t)$ .

Сформулируем краевые задачи для каждого из названных источников.

*1. Плоская электромагнитная волна, падающая нормально к поверхности Земли*

Система уравнений Максвелла в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} H'_x(z, \omega) &= \sigma(z)E_y(z, \omega), \\ E'_y(z, \omega) &= i\omega\mu_0 H_x(z, \omega). \end{aligned} \quad (1)$$

Штрихи означают дифференцирование по координате  $z$ . Исключив  $H_x(z, \omega)$  из уравнения (1), получим:

$$E_y''(z, \omega) = i\omega\mu_0\sigma(z)E_y(z, \omega). \quad (2)$$

Введем, следуя (Weidelt, 1972), функцию отклика среды  $c(\omega)$  при однородном возбуждении поля с помощью равенства:

$$E_y'(z, \omega) = (-1/c(\omega))E_y(0, \omega), \quad (3)$$

$$E_y(z, \omega) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Функция  $c(\omega)$  связана с входным импедансом среды  $Z(0, \omega)$  соотношением:

$$c(\omega) = Z(0, \omega) / i\omega\mu_0. \quad (4)$$

Распределение проводимости с глубиной можно получить в результате решения обратной задачи (2–3).

II. *Вертикальный магнитный диполь, расположенный на поверхности Земли*

Введем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ , ось  $OZ$  совпадает с осью диполя, начало координат совпадает с точкой расположения диполя.

Рассмотрим общий случай, когда диполь приподнят над Землей на высоту  $h$ . Физическим аналогом вертикального магнитного диполя является небольшая круглая рамка площадью  $dS$  и током  $I$  ампер. Первичный ток в рамке имеет только  $\varphi$ -ую составляющую, поэтому вектор-потенциал  $\mathbf{F}$ , определяемый из соотношения  $\mathbf{E} = -\text{rot}\mathbf{F}$  имеет только  $z$ -составляющую во всех средах  $n$ -слойной среды:  $F_z$  (Великин, Франтов, 1962) (в дальнейших выкладках значок  $z$  при  $F$  будем опускать).

Из уравнений Максвелла и условий непрерывности магнитных и тангенциальных электрических составляющих поля на границе двух сред следует, что функция  $F$  в первой и второй средах должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial F_j}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial^2 F_j}{\partial z^2} - k_j^2 F_j = 0; \quad j=1,2. \quad (5)$$

$$F_1 = F_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \text{ при } z = h. \quad (6)$$

$$F_j(z, \omega, \rho) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \mp \infty, \quad (7)$$

$$k_1^2 = i\omega\mu_0\sigma_1, \quad k_2^2 = i\omega\mu_0\sigma(z).$$

Вектор-потенциал, удовлетворяющий краевой задаче (5–6) в первой и второй средах, соответственно имеет вид:

$$F_1(\rho_1, z, \omega) = M \frac{e^{-k_1 r}}{r} + \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \varphi_1(\lambda, \omega) \times$$

$$\times \exp((\sqrt{\lambda^2 + k_1^2})z) d\lambda, \quad z < h, \quad (8)$$

$$F_2(\rho_1, z, \omega) = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \varphi_2(\lambda, \omega) \times$$

$$\times W(z, \lambda, \omega) d\lambda, \quad z \geq h,$$

где  $M$  – момент диполя ( $M = \frac{IdS}{4\pi}$ ;  $r^2 = \rho^2 + z^2$ ), функция  $W(z, \lambda, \omega)$  удовлетворяет уравнению:

$$W''(z, \lambda, \omega) = (\lambda^2 + i\omega\mu_0\sigma(z))W(z, \lambda, \omega), \quad (9)$$

$$W(z, \lambda, \omega) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

По аналогии с задачей для однородного возбуждения, функцию отклика  $\Phi(h, \lambda, \omega)$  одномерной среды при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем введем с помощью равенства:

$$W'(h, \lambda, \omega) = -\frac{1}{\Phi(h, \lambda, \omega)} W(h, \lambda, \omega). \quad (10)$$

Функции  $\varphi_1(\lambda, \omega)$  и  $\varphi_2(\lambda, \omega)$  в выражениях (8) определяются из граничных условий (6). В работах (Хачай, 1979, 1980) изложен подробный вывод связи функции отклика  $\Phi(h, \lambda, \omega)$  с наблюдаемыми значениями поля. Выпишем окончательное выражение для функции отклика  $\Phi(0, \lambda, \omega)$  в явном виде:

$$\Phi(0, \lambda, \omega) = \frac{\int_0^\infty (J_0(\lambda \rho) - 1) H_z(0, \rho, \omega) \rho d\rho}{\lambda \int_0^\infty J_1(\lambda \rho) H_\rho(0, \rho, \omega) \rho d\rho}. \quad (11)$$

Таким образом, для вычисления функции отклика необходимо иметь в качестве наблюдаемых данных две компоненты магнитного поля, наблюдаемых на поверхности Земли как функции расстояния (разноса) и частоты. При этом для этих компонент необходимо иметь измеренными модуль и фазу соответственно. Определение распределения проводимости с глубиной свелось к решению обратной задачи (9–10).

III. Горизонтальный электрический диполь, расположенный на поверхности Земли

Введем систему прямоугольных координат; ось  $OX$  направлена вдоль оси диполя, ось  $OZ$  направлена вниз, начало координат совпадает с точкой расположения диполя. Рассмотрим общий случай, когда проводимость верхнего полупространства отлична от нуля и диполь приподнят над Землей на высоту  $h$ . Электромагнитное поле такого диполя симметрично относительно плоскости  $XOZ$ . Вектор-потенциал поля  $\mathbf{A}$ , определяемый соотношением  $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$  имеет две составляющие:  $A_x$  – параллельную оси диполя и  $A_z$  – перпендикулярную границе раздела, каждая из которых в первой и второй средах удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \Delta A_x + k_j^2 A_x &= 0; \\ \Delta A_z + k_j^2 A_z &= 0; \quad j = 1, 2; \\ k_1^2 &= i\omega\mu_0\sigma_1; \quad k_2^2 = i\omega\mu_0\sigma(z) \end{aligned} \quad (12)$$

и граничным условиям при  $z=h$  (Заборовский, 1960):

$$\begin{aligned} A_{x1} &= A_{x2}; \quad A_{z1} = A_{z2}; \\ \frac{1}{k_1^2} \text{div}\vec{A}_1 &= \frac{1}{k_2^2} \text{div}\vec{A}_2; \quad \frac{\partial A_{x1}}{\partial z} = \frac{\partial A_{x2}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$ , начало и ось  $OZ$  которой совпадают с началом и осью декартовой системы; плоскость  $XOZ$  является началом отсчета азимутальных углов  $\varphi$ .

Решая уравнения (12) в цилиндрической системе координат методом разделения переменных, получим следующие выражения для составляющих вектора-потенциала в первой и второй средах (Заборовский, 1960):

$$\begin{aligned} A_{x1}(\rho, z, \omega) &= p \frac{e^{-k_1 r}}{r} + \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\varphi_1(\lambda, \omega) \times \\ &\times \exp(\sqrt{\lambda^2 + k_1^2} z) d\lambda, \quad z < h, \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$\begin{aligned} A_{z1}(\rho, z, \omega) &= \text{Cos}\varphi \int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\psi_1(\lambda, \omega) \times \\ &\times \exp(\sqrt{\lambda^2 + k_1^2} z) d\lambda, \quad z < h, \end{aligned} \quad (14.2)$$

$$\begin{aligned} A_{x2}(\rho, z, \omega) &= \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\varphi_2(\lambda, \omega) \times \\ &\times Y(z, \lambda, \omega) d\lambda, \quad z \geq h, \end{aligned} \quad (14.3)$$

$$\begin{aligned} A_{z2}(\rho, z, \omega) &= \text{Cos}\varphi \int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\psi_2(\lambda, \omega) \times \\ &\times Y(z, \lambda, \omega) d\lambda, \quad z \geq h, \end{aligned} \quad (14.4)$$

где  $p$ -момент диполя; функция  $Y(z, \lambda, \omega)$  удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} Y''(z, \lambda, \omega) &= (\lambda^2 + i\omega\mu_0\sigma(z))Y(z, \lambda, \omega); \\ Y(z, \lambda, \omega) &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

По аналогии с рассмотренными задачами введем функцию отклика одномерной среды при возбуждении поля горизонтальным электрическим диполем  $R(h, \lambda, \omega)$  с помощью соотношения:

$$Y'(h, \lambda, \omega) = -\frac{1}{R(h, \lambda, \omega)} Y(h, \lambda, \omega). \quad (16)$$

Функции  $\varphi_1(\lambda, \omega), \varphi_2(\lambda, \omega), \psi_1(\lambda, \omega), \psi_2(\lambda, \omega)$  в выражениях (14.1–14.4) определяются из граничных условий (13).

В работах (Хачай, 1979, 1980) изложен подробный вывод связи функции отклика  $R(h, \lambda, \omega)$  с наблюдаемыми значениями поля. Выпишем окончательное выражение для функции отклика  $R(0, \lambda, \omega)$  в явном виде:

$$\begin{aligned} R(0, \lambda, \omega) &= -(2/\lambda) \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{\int_0^\infty (h_\rho(0, \rho, \varphi) + h_\varphi(0, \rho, \varphi)) J_0(\lambda\rho) \rho d\rho}{\int_0^\infty h_z(0, \rho, \varphi) J_1(\lambda\rho) \rho d\rho} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, функция отклика одномерной среды при возбуждении поля горизонтальным электрическим диполем связана, как и в случае II с интегральными значениями горизонтальных и вертикальной составляющими магнитного поля на дневной поверхности. При этом необходимо, чтобы были измерены модуль и фаза соответствующих компонент в ряде точек на профиле и для достаточного представительного количества частот. Определение распре-

ления проводимости с глубиной свелось к решению обратной задачи (15–16).

Перейдем к построению единого оператора решения обратной задачи электромагнитных зондирований.

Как видно из (9–10) и (15–16), краевые задачи электромагнитного зондирования одномерной среды при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем и горизонтальным электрическим диполем совпали, причем  $Y(z, \lambda, \omega) = W(z, \lambda, \omega)$  и  $\Phi(0, \lambda, \omega) = R(0, \lambda, \omega)$ . Отсюда следует тождественность оператора решения обратной задачи для одномерной среды для рассмотренных двух типов искусственного возбуждения поля. Входными данными для решения обратной задачи (9–10) и (15–16) являются значения функции отклика, вычисленные по формулам (11) и (17).

Тождество оператора решения обратной задачи для рассмотренных типов дипольного зондирования одномерной среды позволяет использовать единые алгоритмы обработки и интерпретации экспериментальных данных. Кроме того, дает возможность определять параметры нормального разреза, т.е. распределение проводимости с глубиной по совокупности значений функции отклика, полученных при возбуждении поля магнитным и электрическим диполями после предварительной фильтрации данных в область определения оператора решения одномерной обратной задачи. Поскольку наблюдаемые данные в своем большинстве неполные, то возможность одновременного единообразного использования этих данных, полученных двумя независимыми методами электромагнитного зондирования, позволит, безусловно, существенно повысить достоверность интерпретации.

Наконец, краевые задачи (9–10) и (15–16) с помощью замены переменных (Weidelt, 1972):

$$\tilde{z} = \frac{\text{ch}\lambda z}{\lambda}, \quad \tilde{W}(\tilde{z}, \omega) = W(z, \lambda, \omega) / \text{ch}\lambda z, \quad (18)$$

$$\tilde{\sigma}(\tilde{z}) = \sigma(z) \text{ch}^4(\lambda z)$$

удается свести к краевой задаче для однородного возбуждения (2–3):

$$\begin{aligned} \tilde{W}''(\tilde{z}, \omega) &= i\omega\mu_0 \tilde{\sigma}(\tilde{z}) \tilde{W}(\tilde{z}, \omega), \\ \tilde{W}(\tilde{z}, \omega) &\rightarrow 0 \quad \text{при } \tilde{z} \rightarrow \infty, \\ \tilde{W}'(0, \omega) &= -\frac{1}{\Phi(0, \lambda, \omega)} \tilde{W}(0, \omega). \end{aligned} \quad (19)$$

Функции  $\tilde{W}(\tilde{z}, \omega)$  и  $\Phi(0, \lambda, \omega)$  здесь формально играют роль  $E_y(0, \omega)$  и  $c(0, \omega)$  задачи (2–3), но не для истинного, а трансформированного в соответствии с преобразованием (18) разреза. Следовательно, при возбуждении поля рассмотренными дипольными источниками, в отличие от однородного возбуждения, сначала из решения задачи (2–3) определяется функция  $\tilde{\sigma}(\tilde{z})$  – трансформированный нормальный разрез, а затем путем обращения формул (18–19) – функция  $\sigma(z)$ .

Под входными «наблюдаемыми» данными для обратной задачи (2–3) в дальнейшем будем понимать значения комплексной функции отклика, вычисленные по формулам (4), (11), (17) по наблюдаемым значениям составляющих (модуля и фазы) электромагнитного поля. Следует отметить, что предложенный формализм, позволяющий единообразно решать обратную задачу электромагнитного зондирования одномерной среды, удалось построить с использованием функции отклика, а не импеданса среды, обычно применяемых при качественной интерпретации данных ЭМЗ.

Отдельно следует сделать еще одно отступление. Георгий Митрофанович обладал очень мощной интуицией при построении новых теорий интерпретации геофизических данных. Он никогда не стремился создавать теорию ради теории. Он всегда говорил, что правильная теория всегда имеет практический выход, и ревностно следил за тем, чтобы и его ученики придерживались этой рекомендации.

Вот и теперь, преимущество предложенного подхода особенно очевидно, когда на практике, например (Астраханцев и др. 1977), необходимо было интерпретировать данные, полученные на одной и той же площади разными методами электромагнитного зондирования. Кроме того, в этой постановке с помощью вход-

ных данных в виде комплексной функции отклика, зависящей от частоты, при интерпретации достигается учет как модульных, так и фазовых характеристик поля. В работе (Хачай, 1980) подробно изложен алгоритм вычисления функции отклика одномерной среды для трех рассматриваемых типов источников электромагнитного поля.

**Алгоритм регуляризации одномерной обратной задачи электромагнитных зондирований**

Известно (Гельфанд, Левитан, 1951; Тихонов, 1965; Weidelt, 1972), что для данных, принадлежащих области  $M$  определения оператора решения обратной задачи, решение существует и оно единственно. Однако определяемые из практических измерений входные данные могут быть осложнены влиянием локальных неоднородностей и поэтому могут содержать значения, не принадлежащие области  $M$ . В этом случае необходима регуляризация.

Идея получения регуляризованных входных данных (т.е. таких, для которых существует решение одномерной обратной задачи) заключается в том, чтобы построить для функции отклика аналитическую аппроксимационную конструкцию, удовлетворяющую необходимым и достаточным условиям существования решения и допускающую приближенное выражение произвольной функции, принадлежащей области  $M$  с любой наперед заданной точностью. Определяя параметры аппроксимационной конструкции из условия минимума отклонений от входных данных (в подходящей метрике), мы тем самым осуществляем идею (Страхов, 1969) фильтрации наблюдаемых данных в область определения оператора решения обратной задачи.

Реализация этой идеи достигнута следующим образом. Краевая задача (19) после замены переменных (Weidelt, 1972 )

$$\omega \rightarrow k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma(0)}, \quad z \rightarrow x = \int_0^z \sqrt{\sigma(t)/\sigma(0)} dt,$$

$$\tilde{W}(z, \omega) \rightarrow f(x, k) = \sqrt[4]{\sigma(z)/\sigma(0)} (\tilde{W}(z, \omega) / \tilde{W}(0, \omega)), \quad (20)$$

$$\sigma(z) \rightarrow u(x) = \sqrt[4]{\sigma(z)/\sigma(0)}$$

преобразуется к каноническому виду задачи Штурма-Лиувилля (Наймарк, 1969):

$$f''(x, k) = (k^2 + V(x)) f(x, k),$$

$$f'(0, k) = \left[ -\frac{1}{\Phi(0, \lambda, k)} + u'(0) \right] f(0, k), \quad (21)$$

$$\Phi(0, \lambda, k) = \Phi(0, \lambda, \omega(k)),$$

где  $V(x) = u''(x) / u(x)$  – непрерывная функция при  $0 \leq x < \infty$ . Спектральная функция  $s(\theta)$  (Наймарк, 1969) линейного дифференциального оператора, определяемого выражением  $f''(x, k) - V(x)f(x, k)$  и граничным условием (21), связана, как показано в (Weidelt, 1972), с функцией отклика одномерной среды интегральными соотношениями:

$$s(\theta) = \int_0^\theta a(\vartheta) d\vartheta, \quad \Phi(0, \lambda, \omega) = \int_0^\vartheta \frac{a(\vartheta) d\vartheta}{\vartheta + i\omega}. \quad (22)$$

Причем функция отклика  $\Phi(0, \lambda, \omega)$  удовлетворяет асимптотическим условиям:

$$\Phi(0, \lambda, \omega) \cong \frac{1}{\sqrt{i\omega\mu_0\sigma(0)}} \text{ при } \omega \rightarrow 0; \quad (23)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(0, \lambda, \omega) = z_m = \begin{cases} \infty, \text{ если нет} \\ \text{идеального проводника} \\ z_m - \text{глубина} \\ \text{идеального проводника} \end{cases}$$

Условия (22–23), налагаемые на функцию отклика  $\Phi(0, \lambda, \omega)$ , необходимы для существования решения одномерной обратной задачи и должны быть использованы для построения аппроксимационной конструкции. Присоединим к ним условия, достаточные для того, чтобы неубывающая функция  $s(\theta)$  была спектральной функцией оператора Штурма-Лиувилля. Эти условия таковы (Наймарк, 1969):

1. При любом вещественном  $\theta$  существует

интеграл  $\int_0^\theta \exp(-\sqrt{|\theta|x}) ds(\theta)$ .

2. Если положить  $\tau(\theta) = \begin{cases} s(\theta) - \frac{2}{\pi} \sqrt{\theta} \text{ при } \theta > 0 \\ s(\theta) \text{ при } \theta < 0 \end{cases}$ ,

то интеграл  $\int_1^\infty \theta^{-1} \cos \sqrt{\theta} x d\tau(\theta)$  существует

для всех  $x \geq 0$ , и при  $x \geq 0$  функция

$$b(x) = \int_1^{\infty} \theta^{-1} \cos \sqrt{\theta} x d\tau(\theta)$$

имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

3. Множество точек роста спектральной функции имеет хотя бы одну конечную предельную точку.

Условия (22–23) и (1–3) в совокупности являются достаточными условиями существования решения одномерной обратной задачи.

В качестве аппроксимационной конструкции для функции  $s(\theta)$  нами выбрано выражение:

$$s(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{\theta} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j u(\theta - \theta_j) & \text{при } \theta \geq \theta_0, \\ 0 & \text{при } \theta < \theta_0, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\theta_0, \dots, \theta_j, \dots, a_j, \dots$  – вещественные неотрицательные числа;

$$u(\theta - \theta_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta \geq \theta_j, \\ 0 & \text{при } \theta < \theta_j, \end{cases} \quad \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots \quad (25)$$

Тогда  $a(\theta)$  согласно (22) равно:

$$a(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{\theta}} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta(\theta - \theta_j) & \text{при } \theta \geq \theta_0, \\ 0 & \text{при } \theta < \theta_0, \end{cases} \quad (26)$$

где  $\delta(\theta - \theta_j)$  – дельта-функция.

Подставив выражение (26) в (22) и полагая  $a_0 = \sqrt{\mu_0} \sigma(0)$ , получим:

$$\Phi(0, \lambda, \omega) = \frac{2}{\pi} \frac{a_0}{\sqrt{i\omega \mu_0 \sigma(0)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{i\omega}{\theta_0}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{\theta_j + i\omega}. \quad (27)$$

Функция  $\Phi(0, \lambda, \omega)$  в виде (27) удовлетворяет условиям (22–23) и (1–3) и используется далее как аппроксимационная конструкция для функции отклика.

Опять отступление. Этот результат я докладывала на семинаре В.И. Дмитриева в МГУ. Когда В.И. увидел выражение для функции отклика (27), он открыл ящик своего стола, долго что-то искал, а потом достал какие-то старенькие листочки, на которых мелким шрифтом что-то было написано. «Да, действительно, Андрей Николаевич Тихонов тоже полу-

чал такое выражение, но не использовал его так, как сделали это Вы», – сказал он. Я передала эту фразу Георгию Митрофановичу, он слегка улыбнулся, но видно было, что в глубине души был очень доволен.

Надо сказать, что в то время процесс регуляризации задач геофизики носил очень абстрактный характер. Геофизики знали, что этот процесс необходим, но что и как его осуществлять – был большой вопрос. Ссылались на В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева, А.Н. Тихонова иногда по очереди, иногда на всех вместе. Нам же удалось построить регуляризованное решение конкретно для оператора нашей обратной задачи. Георгий Митрофанович очень гордился этим.

В данном случае нахождение минимума уклонения аппроксимирующей функции от входных данных в метрике  $L_2$  в комплексной плоскости  $\ln \Phi$  наиболее отвечает характеру решаемой задачи. При этом обеспечивается равномерная относительная точность приближения во всем диапазоне изменения  $\Phi$ . Кроме того, получается простая конструкция, позволяющая, например, данные магнитотеллурического зондирования фильтровать, отдельно учитывая наблюдения модуля и фазы импеданса. С учетом сказанного в качестве функции цели выбрана функция:

$$Q(a_j, \theta_j) = \sum_{(k)} \left| \ln \Phi^r(\omega_k) - \ln \Phi^m(a_j, \theta_j, \omega_k) \right|^2, \quad (28)$$

где  $\Phi^r(\omega_k)$  – значения функции отклика, вычисленные по наблюдаемым данным по формулам (4), (11), (17);  $\Phi^m(a_j, \theta_j, \omega_k)$  – значения теоретической функции отклика, вычисленные по формуле (27). Полученные в результате значения  $\Phi^m(a_j, \theta_j, \omega_k)$  являются регуляризованными данными, обладающие тем свойством, что они принадлежат области определения оператора решения одномерной обратной задачи и наилучшим образом выбранной метрике соответствуют в совокупности как модульным, так и фазовым наблюдаемым данным.

**Алгоритм решения одномерной обратной задачи**

Решение одномерной обратной задачи по регуляризованным данным можно получить, применяя строгий алгоритм (Weidelt, 1972), причем точность численных операций, связанных с применением этого метода, может быть как угодно высока. Однако алгоритм (Weidelt, 1972) слишком труден и сложен для массового применения, в чем признавался сам П. Вайдельт в своей работе (Weidelt, 1972). Поэтому нами был разработан приближенный алгоритм решения одномерной обратной задачи (Хачай, 1978), который основан на принципе последовательного послойного аппроксимационного продолжения входного импеданса  $Z(\omega)$ , заданного на поверхности Земли как комплексная функция частоты, вглубь среды. Способ интерпретации, сходный в идейном отношении с рассмотренным, был предложен в работе (Светов, Хализов, 1976). При этом в качестве значений входного импеданса используются его значения, вычисленные по регуляризованным значениям функции отклика по формуле:

$$Z(\omega) = \Phi^m(0, \lambda, \omega) i \omega \mu_0.$$

Кратко алгоритм сводится к следующему: независимо от истинного распределения проводимости среды аппроксимируем его кусочно-постоянной функцией, т.е. принимаем, что среда состоит из слоев с удельными сопротивлениями  $\tilde{\rho}_n$  и мощностями  $\tilde{h}_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) соответственно, число слоев и их параметры заранее не фиксируются.

Учитывая закономерности распространения электромагнитного поля в проводящей среде, всегда можно выбрать такую большую частоту, что входной импеданс  $n$ -слойной среды  $Z_n(\omega_i)$  на этой частоте будет определяться только сопротивлением верхнего проводящего слоя. Поэтому аппроксимируем его входным импедансом эквивалентного полупространства  $Z_1(\omega_1)$ , по которому найдем сопротивление первого слоя. С уменьшением частоты электромагнитное поле проникает в нижележащие слои, и их влияние начинает сказываться на значении входного импеданса  $n$ -слойной

среды. Уменьшим частоту до значения  $\omega_2 = \omega_1 - \Delta\omega$ . Входной импеданс  $Z_n(\omega_2)$  на частоте  $\omega_2$  аппроксимируем входным импедансом двухслойной среды с параметрами  $\tilde{\rho}_1, \tilde{h}_1, \tilde{\rho}_2$ . Параметр  $\tilde{h}_1$  определяется из условия того, что на глубине  $h_1$  входной импеданс, аналитически продолженный через первый слой, имеет фазу, равную  $\pi/4$  и следовательно вновь может быть представлен как импеданс некоторого эффективного полупространства. Удельное сопротивление  $\tilde{\rho}_2$  принимается за сопротивление второго слоя. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет исчерпана частотная кривая импеданса. В случае, когда имеется дополнительная геологическая информация о геоэлектрическом строении верхней части разреза, алгоритмом предусмотрен ее учет при помощи аналитического продолжения входного импеданса через среду с известными параметрами. После этого интерпретация ведется с использованием алгоритма, описанного выше.

В результате решения одномерной обратной задачи предложенным алгоритмом можно получить набор разрезов, которые существенно зависят в пределах квазиэквивалентности от принятого начального значения  $\omega_1$  и шага смещения по частотной кривой, но обладают тем свойством, что при решении соответствующей прямой задачи в своем большинстве дают хорошее согласие с входными данными. Из них делается выборка разрезов, удовлетворяющих входным данным с заданной точностью.

При решении обратной задачи электромагнитного зондирования с дипольным источником необходимо перейти от полученного набора параметров  $\{\tilde{\sigma}_j, \tilde{h}_j\}$ , соответствующих трансформированному разрезу, к параметрам в естественной системе координат.

$$h_j = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg}(\lambda \tilde{h}_j); \quad z = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg}(\lambda z);$$

$$\sigma(z) = ch^{-4}(\lambda z) \sigma(\lambda^{-4} th(\lambda z)).$$

### **Заключение**

Все алгоритмы, изложенные выше, реализованы в виде программ, составленных на языке Фортран и прошли апробацию на теоретических и практических примерах.

Имя Георгия Митрофановича было широко известно за пределами нашего Института. К нам в лабораторию приезжали на семинары практически ежегодно В.Н. Страхов, В.И. Старостенко со своими учениками, А.И. Прилепко, В.Г. Чередниченко, наша лаборатория имела тесный контакт с В.К. Ивановым и его учениками. Все это предполагало хорошую почву для роста нас, молодых. Георгий Митрофанович воспитывал в нас самостоятельность творчества и умение не пасовать перед трудностями. Это позволило в дальнейшем получать все более сложные результаты для более сложных задач.

### **Литература**

- Агранович М.С.* Несамосопряженные операторы в задачах типа дифракции на диэлектрическом теле // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 5. С. 970–979.
- Агранович М.С.* О несамосопряженных интегральных операторах с ядрами типа функции Грина и связанных с ними задачах дифракции // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20. № 7. С. 1370–1378.
- Агранович М.С.* Спектральные свойства задач дифракции // Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции: Дополнение / Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. М.: Наука, 1977. С. 386–389.
- Астраханцев Г.В., Бабаков Ю.П., Булашевич Ю.П. и др.* Индукционное зондирование земной коры на Урале с применением МГД-генераторов // ДАН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 808–812.
- Бердичевский М.Н., Жданов М.С.* Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. М.: Недра, 1981. 327 с.
- Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Изд-во Наукова Думка, 1965. 264 с.
- Великин А.В., Франтов Г.С.* Электромагнитные поля, применяемые в индукционных методах электроразведки. М.: Гостоптехиздат, 1962. 534 с.
- Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. 415 с.
- Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1951. Т. 15. Вып. 4. С. 309–360.
- Гохберг Ю.М., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 432 с.
- Заборовский А.И.* Переменные электромагнитные поля в электроразведке. М.: Изд-во МГУ, 1960. 115 с.
- Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
- Светов Б.С., Хализов А.Л.* Амплитудно-фазовый способ послойной интерпретации магнитотеллурических зондирований горизонтально-слоистых сред // Прикладная геофизика. М.: Недра, 1976. С. 142–146.
- Страхов В.Н.* Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике. I // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969. № 8. С. 30–53.
- Тихонов А.Н.* К математическому обоснованию электромагнитных зондирований // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 545–548.
- Хачай О.А.* К вопросу о решении обратной задачи магнитотеллурического зондирования для комплексного импеданса // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 12. С. 45–51.
- Хачай О.А.* Обратная задача электромагнитного зондирования одномерной среды: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1979.
- Хачай О.А.* Унифицированный метод решения обратной задачи электромагнитных зондирований для одномерной среды // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 5. С. 51–60.
- Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Наука, 1965. 542 с.
- Weidelt P.* The inverse problem of geomagnetic induction // Zeitschrift fur Geophysik. 1972. V. 38. P. 257–289.

## О ВОЗМОЖНОСТИ МГД-ГЕНЕРАЦИИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СТАДИИ АККУМУЛЯЦИИ ЗЕМЛИ

*Хачай Ю.В.* – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

**Аннотация.** В работе исследуется возможность развития МГД-динамо на стадии аккумуляции Земли. Для описания условий в растущей планете используются результаты численного моделирования предложенного ранее механизма аккумуляции Земли (Анфилогов, Хачай, 2005; Khachay, Anfilogov, 2010). При возникновении электропроводного ядра изучается возможность генерации в нем геомагнитного поля. Критерием возникновения генерации поля считается возникновение внутри слоя областей, значения магнитной индукции в которых превышают пороговое значение, превышающее значение внешнего поля. Задача решается численно методом конечных разностей в 3D-модели для сектора сферического слоя в естественных переменных совместно с задачей об аккумуляции планеты.

*Аккумуляция Земли, геомагнитное поле, МГД-динамо.*

### ABOUT THE POSSIBILITY OF THE MHD-GENERATION GEOMAGNETIC FIELD ON THE STAGE OF EARTH'S ACCUMULATION

*Khachay Yu.V.* – Institute of Geophysics, UB of RAS, Yekaterinburg

**Abstracts.** In the paper we had researched the possibility of MHD-dynamo development on the stage of Earth's accumulation. The description of PT-conditions evolution in the growing planet is based on the results of numerical modeling of Earth's accumulation mechanism, which we had suggested earlier (Анфилогов, Хачай, 2005; Khachay, Anfilogov, 2010). The possibility of geomagnetic field generation is searched by appearing a melted layer in the forming core. The criterion of field generation appearance is considered the appearance into the layer some areas, for which the values of magnetic induction exceed the threshold value, which exceeds the value of the outer field. The problem is solved by the finite-difference method in a 3-D model for a sector of the spherical layer in natural variables together with the planet accumulation problem.

*Accumulation of the Earth, geomagnetic field, MGD-dynamo.*

#### **Введение**

В одном из докладов на заседании ученого совета Института геофизики УНЦ АН СССР по случаю своего 70-летия Георгий Митрофанович Воскобойников подводил краткий итог своей работы и результатов, полученных созданной им лабораторией математической геофизики. Он, в частности, отметил, что в лаборатории в основном завершены работы по теории интерпретации гравитационного поля, стационарного магнитного поля и получено существенное продвижение в теории интерпретации электромагнитных геофизических полей. Исследования лаборатории еще не охватывают интерпретацию сейсмических и сейсмологических данных, а также задач геодинамики. А в заключение сказал: «Это уже вам делать». Выполнять его напутствие оказалось совсем непросто. Ниже приведены результаты, полученные

при исследовании одной из нерешенных проблем физики Земли, связанных с вопросом о времени возникновения МГД-процесса генерации геомагнитного поля.

Обычно предполагается (Стейси, 1972), что возраст пород, сохранивших остаточную намагниченность, дает оценку возраста земного динамо. За последние годы обнаружены такие породы все более древнего возраста, вплоть до значений (3,8–3,9) млрд. лет. Все более популярна становится идея о том, что геомагнитное поле возникло еще на стадии формирования Земли. Однако ранние модели аккумуляции планеты (Сафронов, 1969) приводили к формированию однородной и сравнительно холодной планеты (кривая 1 на рисунке). Земное ядро в этих моделях могло образоваться только спустя (1,5–2,0) млрд. лет после завершения основного этапа аккумуляции. Такие результаты не смогли

объяснить не только наличие пород со значительно более древней намагниченностью, но и выводы изотопной геохимии. Долгое время в качестве наиболее убедительной рассматривалась модель мегаимпакта (Camegon, 2000), по которой раннее формирование ядра и мантии Земли явилось следствием столкновения сформировавшейся протопланеты с телом массы Меркурия. Однако и все динамические модели аккумуляции Земли (Сафронов, 1969; Печерникова, Витязев, 2005), и оценки по свинец-свинцовой системе (Бибикова, 1989) приводят к заключению о том, что длительность аккумуляции планеты составляла около  $10^8$  лет. Тогда как изотопные результаты по W-Hf системе свидетельствуют об очень раннем, за (5–10) млн. лет, разделении геохимических резервуаров ядра и мантии (Jacobsen, Yin, 2003). Это означает, что разделение геохимических резервуаров ядра и мантии должно было произойти еще до этапа достижения Землей ее современной массы. В работах (Анфилов, Хачай, 2005; Khachay, Anfilogov, 2010) показано, что учет выделения энергии при распаде короткоживущих радиоактивных элементов, и прежде всего  $Al^{26}$ , достаточен для нагрева даже малых тел, размера около (50–100) км, до температур плавления железа, затем реализуется принципиально новый механизм дифференциации. Объединяются расплавленные, преимущественно железного состава внутренние части протопланетных зародышей, а холодные силикатные осколки возвращаются в зону питания. Только после того как гравитационный радиус увеличится, выросшая область будущего ядра оказывается способна удерживать и осколки силикатной оболочки. РТ-условия в формирующейся области ядра ко времени достижения его современной массы оказываются таковы, что внутреннее ядро находится в твердом состоянии, а внешнее – в расплавленном. Тем самым могут реализоваться условия для МГД-динамо. При рассмотрении этой задачи, в отличие от достаточно изученного механизма генерации геомагнитного поля в уже сформировавшейся

планете (Roberts, Glatzmaier, 2000; Glatzmaier, Clune, 2000), необходимо учитывать изменение размера области, в которой реализуется процесс и изменение гравитационного ускорения в процессе аккумуляции планеты.

### Постановка задачи

Задача решается в два этапа. На первом этапе численно решается система уравнений, описывающих аккумуляцию планеты (1) и система уравнений (2) – (8), с помощью которых можно описать распределение РТ-условий во внутренних областях растущей планеты. На этом этапе используется сферически-симметричная модель с задаваемым распределением плотности. Для скорости изменения массы растущей протопланеты предложены соотношения (Печерникова, Витязев, 2005). Мы здесь используем более раннее уравнение (Сафронов, 1969), дающее близкие результаты, но удобное в использовании:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 2(1 + 2\theta)r^2\omega\left(1 - \frac{m}{M}\right)\sigma, \quad (1)$$

где  $\omega$  – угловая скорость орбитального движения;  $\sigma$  – поверхностная плотность вещества в зоне «питания» планеты;  $M$  – современная масса планеты;  $r$  – радиус растущего зародыша;  $\theta$  – статистический параметр, учитывающий распределение частиц по массам и скоростям в зоне «питания».

Система уравнений (2) – (6) позволяет получить распределение температуры и давления в многофазной среде внутренних областей растущей планеты.

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}\right] = -\nabla P + \eta \Delta \vec{V} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi\right) \nabla(\nabla \vec{V}) - \rho \nabla W \quad (2)$$

$$\rho T \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) S \right] = \lambda \Delta T + Q \quad (3)$$

$$\Delta W_1 = -4\pi\gamma\rho \quad W = W_1 + W_2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0 \quad (5)$$

$$L \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \bar{q}|_{\xi+0} - \bar{q}|_{\xi-0}, \quad (6)$$

где  $\vec{V}$  – скорость жидкости;  $P$  – давление;  $S$  – энтропия;  $W_1$  – гравитационный потенциал,  $W_2$  – центробежный потенциал;  $\rho$  – плотность;  $\eta$  и  $\xi$  – коэффициенты первой и второй вязкости;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $Q$  – суммарная мощность внутренних источников энергии в единице объема;  $L$  – теплота фазового перехода;

$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}$  – положение границы раздела фаз;

$\bar{q}|_{\xi=0}$  и  $\bar{q}|_{\xi=0}$  – плотность теплового потока, соответственно, перед и за фазовой границей;  $\nabla$  и  $\Delta$  – операторы «набла» и Лапласа.

На втором этапе решается задача (9) – (14).

### Методы и решение

Трудности доставляет уже решение краевых задач для первого уравнения (2) этой системы, которое называют уравнением Навье-Стокса. Даже в приближении с постоянными коэффициентами вязкости, как это использовано при его записи в виде (3), в 3D-сферическом слое нахождение численного решения представляет существенную проблему. Кроме того, в рамках уравнения (2) затруднительно описать вынужденное конвективное перемешивание вещества вблизи поверхности растущего тела при падении отдельных тел. Реальные вычислительные возможности до недавнего времени позволяли использовать только сильно усредненное описание в сферически симметричной модели. Распределение температуры в теле увеличивающегося радиуса при таком подходе находится из численного решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с учетом возможности появления расплава без явного выделения положения границы фронта кристаллизации и параметрического учета конвективного теплопереноса в расплаве по (Тихонов, Любимова, Власов, 1969):

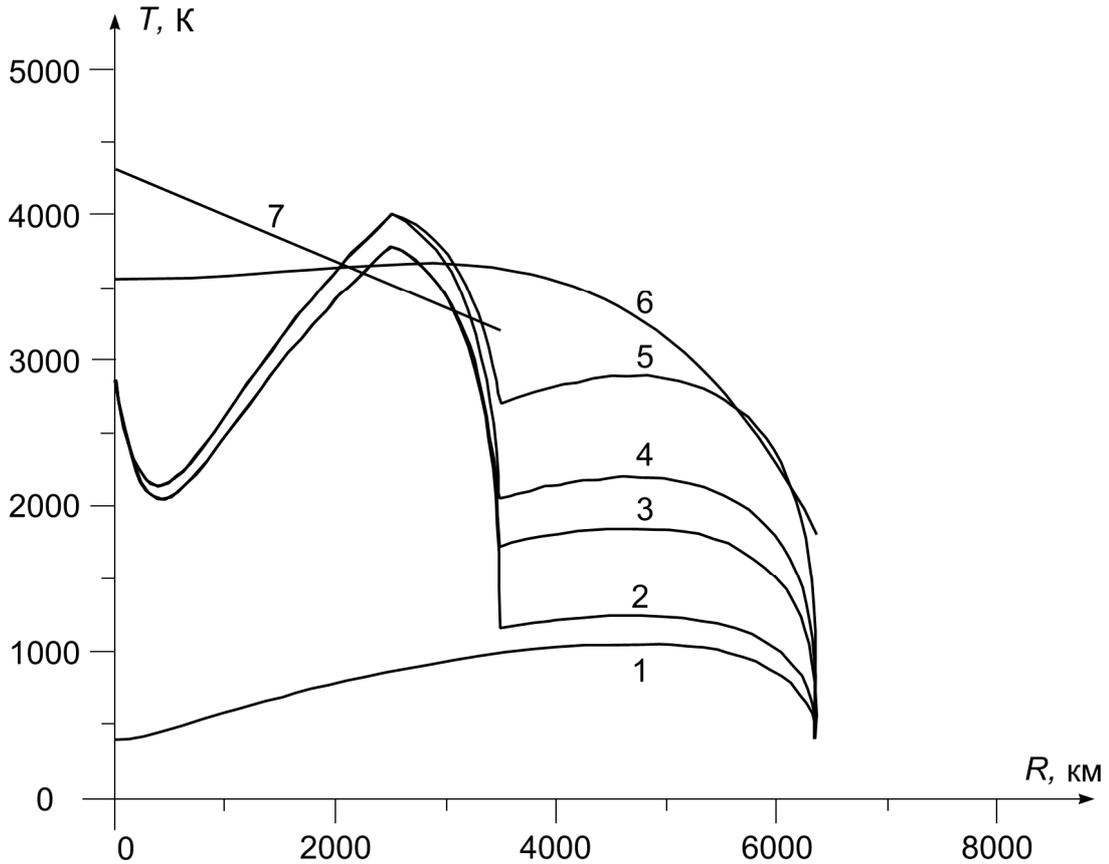
$$c_{\text{эф}} \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (\lambda_{\text{эф}} \nabla T) + Q, \quad (7)$$

где  $c_{\text{эф}}$ ,  $\lambda_{\text{эф}}$  – эффективные значения теплоемкости и теплопроводности, которые учитывают теплоту плавления в задаче Стефа-

на по (Самарский, Моисеенко, 1965) и наличие конвективного теплопереноса;  $T$  – искомая температура в точке в момент времени  $t$ ;  $Q$  – объемная мощность внутренних источников тепла. Задача решалась методом конечных разностей с использованием полностью неявной монотонной, консервативной схемы. Поэтому реально вместо системы (1–6, 8), решалась система (1, 7, 8). В уравнениях (1), (7), (8) шаг по временной и пространственной сеткам используется один и тот же. Здесь размерный шаг по пространственной сетке постоянный и составляет 1 км. Шаг по временной сетке переменный и при выбранном распределении плотности как функции глубины вычисляется из уравнения (1). С использованием этого уравнения на каждом временном шаге вычисляются масса растущей планеты и распределение литостатического давления во внутренних областях. Для каждого значения достигнутого размера растущей планеты вычисляется распределение температуры плавления. В ядре зависимость температуры плавления в основном железного состава вычисляется по (Стейси, 1972). В области формирующейся преимущественно силикатной мантии используется зависимость температуры плавления от давления по (Kaula, 1979). Зона полного и частичного плавления определялась для каждого временного слоя по сопоставлению вычисленного распределения температуры с распределением температуры плавления на данной глубине. На поверхности растущего тела заданы условия, обеспечивающие баланс поступающей части потенциальной энергии гравитационного взаимодействия тел, затраты тепла на нагревание поступившего вещества и переизлучаемого в пространство теплового потока с учетом прозрачности внешней среды (Жарков, Трубицын, 1980)

$$k \rho \frac{\gamma M}{r} \frac{dr}{dt} = \varepsilon \chi [T^4 - T_1^4] + \rho c_p [T - T_1] \frac{dr}{dt}, \quad (8)$$

где  $k$  – доля преобразованной в тепло потенциальной энергии;  $\rho$  – плотность вещества;  $\gamma$  – гравитационная постоянная;  $M$  – масса растущей планеты;  $r$  – ее радиус;  $\varepsilon$  –



Возможные варианты распределения температуры к моменту достижения планетой  $R = 6300$  км:

- 1 – аккумуляция из мелких частиц (выделение тепла короткоживущими радиоактивными элементами не учитывается),  $k$  в области растущего ядра принято  $k = 0,001$ , в области мантии  $k = 0,001$ ; 2 – учитывается выделение тепла короткоживущими радиоактивными элементами,  $k$  в области растущего ядра  $k = 0,3$ , в области мантии  $k = 0,002$ ; 3 –  $k$  в области растущего ядра  $k = 0,4$ , в области мантии  $k = 0,01$ ; 4 –  $k$  в области растущего ядра  $k = 0,4$ , в области мантии  $k = 0,02$ ; 5 –  $k$  в области растущего ядра  $k = 0,5$ , в области мантии  $k = 0,05$ ; 6 – зависимость температуры плавления силикатного вещества мантии от давления (Kaula, 1979); 7 – зависимость температуры плавления вещества ядра от давления (Стейси, 1972)

коэффициент прозрачности среды;  $\chi$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $T$  и  $T_1$  – соответственно, температура тела на границе и внешней среды;  $c_p$  – удельная теплоемкость.

Полученные распределения температуры и гидростатического давления используются далее в качестве граничных условий в 3-D блоке сферического слоя. Предполагается, что для рассматриваемой длительности процесса аккумуляции развитые конвективные течения электропроводного вязкого вещества реализуются только в слое расплава формирующегося ядра. Далее численно решается задача о МГД-

течении в 3-D блоке с учетом того, что верхняя граница слоя перемещается и, соответственно, масса тела и гравитационное ускорение увеличиваются. В приближении Буссинеска процесс может быть описан в виде:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\nabla \vec{V}) \right) = -\nabla P + \mu \Delta \vec{V} + 2\rho \vec{V} \times \vec{\Omega} - \rho \nabla W + [\nabla \times \vec{B}] \times \vec{B} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}[\vec{V} \times \vec{B}] = D_m \Delta \vec{B} \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}(\nabla T) = \chi \Delta T \quad (11)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{div} \vec{V} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия

$$r=R^{N+1} \quad V_z=V_\theta=V_\lambda=0 \quad B_z=B_0 \cos\theta \quad B_\theta=B_0 \sin\theta \\ P=0 \quad T=T(N+1,1,1,1) \quad (13)$$

$$r=r_-=r(l) \quad V_z=V_\theta=V_\lambda=0 \quad \frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \\ P=0 \quad T=T(l,1,1,1). \quad (14)$$

Использование приближения Буссинеска существенно упрощает уравнение (9), а в уравнении энергии (11) мы не учитываем выделение тепла при вязком трении и джоулева тепла. Задача решается с использованием конечных разностей в переменных скорость-давление. Численный алгоритм решения задачи в естественных переменных строится на основе метода расщепления. Сначала на следующем временном слое находится для выбранного распределения плотности новое значение массы растущей протопланеты, радиус которой увеличивается на постоянную величину  $\delta r$ . Здесь значение этого шага принимается  $\delta r = 1$  км. Тогда уравнение (1) позволяет определить значение переменного шага по времени  $\delta t$ , за которое произошло это увеличение размера протопланеты. Оно затем используется при решении системы (9) – (12). Для нового значения массы тела, сформированного из слоев плотности  $\rho$  и мощности  $\delta r$ , находится распределение литостатического давления. Это позволяет по имеющимся феноменологическим соотношениям определить распределение температуры плавления вещества заданного состава как функции давления или глубины. Затем с использованием полностью неявной схемы численно решается краевая задача (7) – (8). По сопоставлению найденного из (7) – (8) распределения температуры на  $(n + 1)$  временном слое с полученной кривой плавления производится проверка на возникновение расплавленных областей. Моделирование показало, что зоны проплавления в формирующемся ядре Земли образуют односвязную область, локализованную вблизи поверхности растущего тела (см. рисунок). По полученным для этого временного слоя

распределениям гравитационного ускорения, градиента температуры и мощности слоя расплава  $L$  ( $L = R^{n+1} - r$ ;  $R^{n+1}$  – радиус протопланеты к моменту времени на  $(n + 1)$  временном слое;  $r_-$  – координата нижней границы слоя расплава) определяется число Релея (Ra). Как только число Релея превысит его критическое значение ( $Ra^*$ ),  $Ra > Ra^*$ , включается блок решения краевой задачи для системы уравнений (9) – (12) в 3-D области  $M \{R^{n+1}, r_-; h_\theta, \pi/2 - h_\theta; h_\lambda, \pi/2 - h_\lambda\}$ . По каждой переменной использовалась равномерная сетка. Для описания переменных  $\vec{V}, \vec{B}, P, T$  применялась разностная сетка по пространству  $3501 \times 91 \times 91$ . Для представления скорости, давления, температуры и магнитной индукции используются разнесенные, шахматные сетки. Давление и температура задаются в центрах разностных ячеек, компоненты векторов скорости и магнитной индукции – в центрах соответствующих граней.

Для решения уравнения (9) в естественных переменных применялась схема расщепления (Белоцерковский, 1984). Для нахождения компонент векторов  $\vec{V}, \vec{B}$  использовалась схема предиктор-корректор по (Берковский, Ноготов, 1976). Уравнение Пуассона для надгидростатического возмущения давления решалось методом установления во внутреннем итерационном цикле.

### Результаты и обсуждение

На рисунке представлен возможный вариант распределения температуры в области формирующегося ядра Земли на стадии ее аккумуляции, полученный из решения задачи (1), (7) – (8) при значениях физических параметров, опубликованных в (Khachay, Anfilogov, 2010). Из приведенных результатов видно, что в процессе аккумуляции Земли могли реализоваться две стадии, соответствующие развитию свободной конвекции при подогреве снизу. Во-первых, этап, когда был еще очень значителен энергетический вклад радиоактивного распада короткоживущего элемента  $Al^{26}$ , но масса (50–100) километровой тела, а следовательно и гравитационное ускорение, были слишком малы для реализа-

ции условий конвекции. Во-вторых, этап формирования внешнего ядра Земли, начиная со значения радиуса на нижней границе слоя около 2400 км. До этого температура на верхней границе слоя расплава, благодаря мощному процессу нагревания при падении тел и частиц на растущую планету при практически неупругом соударении, оставалась выше, чем на нижней границе. На этой стадии гравитационное ускорение уже вполне достаточно, чтобы обеспечить свободную конвекцию. Результаты решения (9) – (12) подтвердили это качественное заключение. В интервале глубин (500–2400) км свободная конвекция не развивается, значения компонент магнитного внутри объема остаются ниже граничных значений на внешней поверхности. Только при реализации слоя проплавления в формирующемся внешнем ядре в анализируемой модели развивается свободная конвекция, и величина магнитной индукции может превышать значения, обеспечиваемые внешним полем.

Конечное, рассмотренная модель МГД-течений является очень упрощенной, прежде всего потому, что используется приближение Буссинеска, вязкость вещества принимается постоянной, не учитываются джоулевы потери и при трении не учитывается возможность вынужденного перемешивания при ударах тел. Специального исследования, в отличие от модели МГД-динамо в сформировавшейся планете (Glatzmaier, Clune, 2000; Roberts, Glatzmaier, 2000), требует рассмотрение взаимодействия протопланеты и формирующейся Луны. Это определяет величину угловой скорости вращения растущей Земли и ее изменение со временем в силе Кориолиса в (9).

Тем не менее, численное моделирование показало, что уже на этапе аккумуляции внешнего ядра Земли возможна реализация условий, обеспечивающих генерацию геомагнитного поля Земли.

#### **Литература**

Анфилогов В.Н., Хачай Ю.В. Возможный вариант дифференциации вещества на начальном этапе формирования Земли // ДАН. 2005. Т. 403. № 6. С. 803–806.

Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.

Берковский В.М., Ноготов Г.Ф. Разностные методы решения задач теплопередачи. Минск: Наука и техника, 1976. 176 с.

Бибикова Е. Н. Уран-свинцовая геохронология ранних этапов развития древних щитов М.: Наука, 1989. 177 с.

Жарков И.Н., Трубицын В.П. Физика планетных недр. М.: Наука, 1980. 448 с.

Печерникова Г.В., Витязев А.В. Импакты и эволюция ранней Земли // Катастрофические воздействия космических тел / Под ред. В.В. Адушкина и И.В. Немчинова. М.: Академкнига, 2005. С. 251–265.

Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета многомерной задачи Стефана // Ж. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 5. С. 816–827.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука, 1969. 244 с.

Стейси Ф. Физика Земли. М.: Мир, 1972. 342 с.

Тихонов А.Н., Любимова Е.А., Власов В.К. Об эволюции зон проплавления в термической истории Земли // ДАН СССР. 1969. Т. 188. № 2. С. 338–342.

Cameron A.B. Origin of the Earth and Moon / Ed. R.M. Ganup. University of Arizona Press. 2000. 179 p.

Glatzmaier G.A., Clune C.L. Computational aspects of geodynamo simulations // Comp. Sci. Eng. 2000. N 2. P. 61–67.

Jacobsen S., Yin Q. Models of planetary accretion and core formation based on the Hf-W clock // Geophys. Research Abstracts. 2003. V. 5. P. 13884.

Khachay Yu., Anfilogov V. Variants of temperature distributions in the earth on its accumulation // Proc. of the 6<sup>th</sup> Orlov Conf. “The study of the Earth as a planet by methods of geophysics, geodesy and astronomy” K.: Akad., 2010. P. 197–202.

Kaula E.M. Thermal evolution of Earth and Moon growing by planetesimal impacts // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. P. 999–1008.

Roberts P.H., Glatzmaier G.A. Geodynamo theory and simulations // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72. P. 1081–1124.

## О КОНЦЕПЦИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И РАЗВИТИИ МЕТОДОВ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГАСЯЩИХ ФУНКЦИЙ

*Шестаков А.Ф.* – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

**Аннотация.** В настоящей работе рассмотрены основные этапы формирования концепции особых точек аналитического продолжения геофизических полей (в ретроспективном плане), становления и развития метода особых точек на основе формализованного применения аппарата гасящих функций, основоположником которого является Г.М. Воскобойников.

*Аналитическое продолжение, особые точки, эффективные источники, гасящие функции, геофизические поля, методы интерпретации.*

## ON THE CONCEPT OF SINGULAR POINTS OF ANALYTICAL CONTINUATION GEOPHYSICAL FIELDS AND DEVELOPMENT METHODS OF THEIR DETERMINATION WITH USE OF EXTINGUISHING FUNCTIONS

*Shestakov A.F.* – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

**Abstract.** In the present work the basic stages of formation the conception of singular points of analytical continuation geophysical fields (in the retrospective plan), formation and development of the method of singular points on the basis of formalized application the device of extinguishing functions, which founder is G.M. Voskoboynikov, are considered.

*Analytical continuation, singular points, effective sources, extinguishing functions, geophysical fields, methods of interpretation.*

### **Введение**

Важную роль в формировании общей методологии и единого подхода к предмету интерпретации геофизических полей различной природы имеет концепция аналитического продолжения и особых точек (эффективных источников), которые связаны с материальным аномалиеобразующим объектом и однозначным образом определяют внешнее поле как аппроксимирующую его аналитическую функцию. При этом постановка обратной задачи с учетом этой концепции имеет свою специфику и сопряжена с проблемой устойчивого определения параметров эффективных источников по измеренному полю при отсутствии количественной априорной информации об изучаемой геосреде.

С математической точки зрения, возникающие при этом трудности алгоритмического, вычислительного и методического характера связаны с пониманием сущности обратных задач геофизики как некорректно поставленных в классическом смысле (по Адамару), что существенно усложняет процесс интерпретации аномальных полей

и геологического истолкования получаемых результатов.

Проблема нахождения решения обратной задачи, обладающего физической содержательностью и одновременно устойчивостью, долгое время оставалась открытой. Началом глубокого и всестороннего ее анализа стали работы А.Н. Тихонова (Тихонов, 1943, 1963а, 1963б), М.М. Лаврентьева (Лаврентьев, 1956, 1962), В.К. Иванова (Иванов, 1956, 1962, 1963), результаты которых привели к созданию математических основ теории решения некорректных задач и методов их регуляризации.

Основополагающий аспект этой теории заключается в том, что классические требования корректности постановки задачи вынуждены были быть переформулированы с учетом некоторых условий (ограничений), налагаемых на решение, а новая постановка (по А.Н. Тихонову) открыла возможность получения физически содержательных решений широкого круга задач математической физики, в том числе и обратных задач геофизики (Лаврентьев, 1962).

Формализованная реализация условно корректной постановки состоит в обеспечении единственности и устойчивости приближенного решения на некотором «множестве корректности» (Лаврентьев, 1962) по неточно заданным исходным данным и построении «регуляризующего» оператора решения обратной задачи с использованием так называемого «параметра регуляризации», согласованного с погрешностью задания исходных данных (Лаврентьев, 1962; Тихонов, 1963а, 1963б; Страхов, 1969 и др.).

Наиболее известны два основных подхода при конструировании регуляризующих операторов, связанных с формированием направлений развития методов решения обратных задач геофизики, имеющих отношение к проблеме аналитического продолжения геофизических полей в сторону источников и концепции особых точек. Один из них основан на использовании стабилизирующих или сглаживающих функционалов, параметры которых согласованы с уклонениями точных исходных данных.

Второй подход основан на разработке специальных (адаптивных) регуляризующих алгоритмов, в которых параметр регуляризации непосредственно участвует в построении решения обратной задачи. Этот подход стал развиваться первоначально применительно к потенциальным полям, а сама постановка обратной задачи несколько отличалась от общепринятой, поскольку не определяла построение физико-геологической модели исследуемой среды, а была нацелена на определение таких параметров, которые связаны с аномалиеобразующим объектом и наиболее полно его характеризуют при недостатке или отсутствии априорной информации.

В рамках второго подхода выделяется направление развития методов интерпретации аномалий геофизических полей, базирующихся на концепции аналитического продолжения и особых точек, которые однозначно определяют аналитическую функцию (аппроксимирующую элементы геофизического поля), а постановка обратной задачи сопряжена с проблемой

устойчивого определения множества особенностей его аналитического продолжения, однозначным образом связанных с формой и расположением материальных источников аномалии. Здесь в качестве объекта исследования принимаются сами особенности поля, которые хотя и не определяют полностью физико-геологическую модель среды, но дают интерпретатору некоторое объективное о ней представление, в ряде случаев оказывающееся достаточным (например, при поисковых геологоразведочных работах). Поскольку постановка проблемы локализации особенностей и определения их параметров не предполагает привлечения количественной априорной информации и базируется на фундаментальных принципах аналитического продолжения и концепции особых точек, то соответствующее решение обратной задачи по определению эффективных источников поля обладает «сильной единственностью» по В.Н. Страхову (Страхов, 1972).

Применение этих методов открывает дополнительные перспективы в развитии методики комплексной интерпретации геофизических полей (в условиях недостатка или отсутствия априорной информации), если рассматривать полученные данные о расположении особых точек (связанных с материальными источниками аномалии и единственным образом определяемых по измеренному полю) в качестве объективных «реперных» характеристик изучаемой геосреды и дополнительной количественной входной информации к методам, реализующим решение обратной задачи в рамках общепринятой постановки. Несмотря на то, что решение задачи в полном объеме при таком подходе будет удовлетворять условию «слабой единственности» по В.Н. Страхову, оно, однако, будет обладать существенно большей достоверностью, а окончательное построение физико-геологической модели среды потребует значительно меньших усилий и времени.

Таким образом, концепция аналитического продолжения и особых точек (эффективных источников) поля играет

важную роль и в развитии комплексного методического подхода к проблеме интерпретации геофизических данных.

### **1. О формировании концепции особых точек**

Первым шагом на пути к возникновению этой концепции (применительно к потенциальным полям) явились результаты А.А. Заморева (Заморев, 1939, 1941, 1942) при исследовании двумерной обратной задачи теории потенциала. В частности, впервые возникло представление об особых точках, через которые аналитическое продолжение гравитационных и магнитных полей становится невозможным. Вторым шагом послужили работы Б.А. Андреева (Андреев, 1947, 1949, 1955), давшие начало направлению, учитывающему взаимосвязь особых точек геофизических полей, аналитически продолженных в нижнее полупространство, с источниками этих полей. В общем подходе к проблеме анализа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа с установлением роли особых точек как инвариантов для аналитических функций (позволяющих их охарактеризовать своими особенностями и всесторонне исследовать) истоки этого направления восходят к работе С.Н. Бернштейна (Бернштейн, 1956).

Первоначально концепция особых точек аналитического продолжения формировалась применительно к двумерным потенциальным полям, допускающим эффективное их исследование с помощью хорошо разработанного мощного аппарата теории функций комплексного переменного. Началом глубокого и всестороннего анализа проблемы, приведшего к становлению этой концепции, явились работы (Страхов, 1959, 1960, 1962а, 1962б, 1965, 1967; Голиздра, 1962, 1963, 1968; Цирульский, 1963, 1964; Цирульский, Сиротин, 1964; Шалаев, 1962 и др.). В основополагающей работе (Страхов, 1962а) обосновано утверждение о том, что из значений наблюдаемого геофизического поля в принципе нельзя извлечь другой объективной информации, кроме как информации о расположении особых точек поля и их харак-

теристиках, ибо ими и только ими определяется всякая потенциальная функция. Вместе с тем граница возмущающего тела, равно как его физические свойства, не определяемы без дополнительной информации, за исключением того частного случая, когда все его граничные точки – суть особые.

Фундаментальная роль в решении проблемы о связи особых точек двумерного потенциального геофизического поля с геометрическими характеристиками аномалиеобразующего объекта принадлежит исследованиям А.В. Цирульского (Цирульский, 1963, 1964 и др.), где установлено прямое соответствие между множеством особенностей аналитически продолженного комплексного логарифмического потенциала и особенностями функции, определяющей уравнение контура сечения возмущающего объекта.

Дальнейшее исследование различных аспектов этой проблемы в области потенциальных полей освещается в последующих работах тех же и других авторов, что привело к констатации следующих основных выводов:

1. Аномальное поле, порождаемое аналитическим распределением его источников, расположенных в области  $D$ , ограниченной кусочно-аналитической поверхностью, допускает аналитическое продолжение внутрь области через любой аналитический кусок ее поверхности.

2. Множество точек, через которые аналитическое продолжение внешнего поля осуществить невозможно, является «особым» (множеством особых точек). В частности, линии смыкания аналитических кусков поверхности являются особыми линиями, а их концы – особыми точками.

Примечание: При некоторых специфических распределениях источников поля (имеющих исчезающую плотность в точках смыкания аналитических дуг) или в случае сложной многосвязной границы области (при пересечении нескольких аналитических дуг под определенными углами в одной точке), рассматриваемая точка не будет являться особой в классическом понимании (Никонова, Цирульский, 1975). Однако этот случай имеет больше теоретическое значение и, как правило, не учитывается в практике интерпретации

3. Если вся граница области  $D$  является аналитической, то аналитическое продолжение внешнего поля осуществимо через любую точку поверхности, а его особые точки располагаются строго внутри области.

4. Регистрируемое внешнее поле, возбуждаемое аналитическим распределением источников, однозначно определяется множеством особых точек его аналитического продолжения.

5. Поверхность, ограничивающая область распределения источников поля, в принципе не может быть определена без привлечения априорной или дополнительной информации, за исключением того случая, когда она является множеством особых точек аналитического продолжения внешнего поля.

Для теоретической геофизики эти выводы устанавливали принципиальную неоднозначность решения обратной задачи в классической ее постановке, что было очевидным для наиболее простых случаев распределения источников (семейство концентрических однородных шаров, софокусных эллипсоидов, круговых цилиндров и т. п., которые при соответствующем подборе плотности или намагниченности порождают одно и то же аномальное поле, но в то же время имеют различную границу). В связи с этим, фундаментальное значение для геофизики имеет теория эквивалентных семейств решений, предпосылки которой были заложены В.К. Ивановым, а неоценимый вклад в разработку ее основополагающих аспектов внесли А.В. Цирульский и В.Н. Страхов.

Из нее, в частности, следует, что полное решение обратной задачи теории потенциала (определение как границы объекта, так и его физических свойств) возможно только в том случае, если мы располагаем некоторым объемом априорной информации об исследуемом объекте (сводящейся в частных случаях к постулированию определенных физических свойств объекта или заданию некоторых точек границы области, занятой источниками аномального поля).

Таким образом, наряду с общепринятой постановкой обратной задачи, назрела необходимость в выделении и исследовании таких систем параметров, которые однозначно определяются по измеренному полю (при отсутствии какой-либо априорной информации) и в то же время позволяют получить достаточно полное представление об аномалиеобразующем объекте. Одной из таких систем параметров является множество особенностей аналитического продолжения внешнего поля, элементы которого известным образом связаны с формой и расположением его физических источников.

В связи с этим, формулируя предмет обратной задачи гравимагниторазведки в новой постановке, В.Н. Страхов делает вывод о том, что «наиболее мощными методами интерпретации должны быть методы отыскания особых точек потенциальных функций по ее известным значениям» (Страхов, 1962а, 1962б). В этих же работах, в аспекте развития общей методологии интерпретации потенциальных полей, обсуждается эффективность аналитического продолжения для локализации особенностей поля, предопределившего один из возможных и реализуемых на практике способов обнаружения особых точек.

Применительно к волновым электромагнитным и сейсмическим полям актуальность концепции достаточно убедительно обоснована М.С. Ждановым в работах (Жданов, 1974, 1975 и др.), где показано, что тип и расположение в пространстве особых точек, линий и поверхностей аналитического продолжения электромагнитного поля (как и в потенциальном случае) определяется формой поверхности геоэлектрических неоднородностей. Глубоко идущая аналогия между характером особенностей потенциальных и волновых геофизических полей усматривается также при исследовании продолжения сейсмического поля. В этом случае особые точки представляют собой центры дифракции упругих волн, связанные с формой поверхности рассеивающего тела.

По аналогии с потенциальными полями, М.С. Жданов ввел и обосновал понятие «эффективного источника», которое «может быть расширено и перенесено на другие непотенциальные геофизические поля» (Жданов, 1974). По своей сущности эффективные источники непотенциальных полей представляют собой не что иное, как избыточные (индуцируемые в геоэлектрических неоднородностях) электрические или магнитные токи (в электроразведке) или центры дифракции упругих волн (в сейсморазведке). Как в том, так и в другом случае они представимы в виде суперпозиции мультиполей различного порядка, первыми из которых являются электрические и магнитные диполи (элементарные электромагнитные источники) или точечные источники излучения упругих волн («колеблющаяся» сила и др.). В этой же работе сделан основополагающий вывод о том, что эффективные источники геофизических полей (не только потенциальных, но и волновых электромагнитных и сейсмических), во-первых, однозначно определяют аномальные поля, а во-вторых, однозначным образом могут быть определены по ним и, как следствие этого, «представляют собой прямые данные, бесспорно вытекающие из физической сущности рассматриваемых полей».

Таким образом, М.С. Ждановым обоснована возможность единого подхода к проблеме интерпретации аномальных геофизических полей различной природы, не требующего никакой априорной информации об исследуемом объекте и основанного на поиске эффективных источников аномалий с помощью аналитического (или обращенного во времени – для нестационарных волновых полей) продолжения в нижнее полупространство регистрируемых элементов поля.

## **2. Основные этапы формирования и развития метода особых точек с использованием формализма гасящих функций**

*Интегральные преобразования с ядром из «гасящих функций»*

Весомый вклад в формирование прямых методов, нацеленных на определение

некоторых объективных характеристик аномалиеобразующего объекта по измеренному внешнему полю и не использующих при этом априорной информации, имеет подход, основанный на формализме «гасящих функций», в том числе оригинальной функции Карлемана, сыгравшей важную роль в развитии теории решения некорректных задач математической физики и способов их регуляризации.

В частности, М.М. Лаврентьев при решении задачи Коши для уравнения Лапласа впервые применил функцию Карлемана (обладающую гасящими свойствами) в качестве регуляризирующего элемента, позволяющую построить эффективное устойчивое решение для двумерного и трехмерного уравнений Лапласа (Лаврентьев, 1962).

С использованием формализма гасящих функций комплексного переменного Г.М. Воскобойников (Воскобойников, 1962, 1965) развил фундаментальный результат В.К. Иванова по обратной задаче теории потенциала (Иванов, 1956) и получил ряд важных с практической точки зрения результатов, представляющих геофизический интерес. Одним из них является устойчивое решение задачи локализации наименьшей (в некотором классе) области особенностей двумерного потенциального поля, ближайшей к поверхности Земли. В отличие от алгоритма В.К. Иванова, в качестве ядра интегрального преобразования использовалась двумерная гасящая функция, позволяющая проводить интегрирование по конечному отрезку, на котором известны исходные данные задачи, и одновременно освободиться от нежелательной гипотезы ограниченности области распределения источников поля. Сформулированы условия, необходимые и достаточные для устойчивого решения задачи, и выработан критерий оптимальной точности результата на основе анализа аналитической структуры вклада в изображение поля различных его особенностей.

В дальнейшем показана принципиальная возможность использования разработанного алгоритма к задаче локализации

особенностей трехмерных потенциальных полей (Воскобойников, Сиротин, 1965). Применимость изложенного ранее математического аппарата двумерной задачи базируется на теореме Эрдейи, устанавливающей взаимно-однозначное соответствие между простой областью регулярности трехмерной аксиально-симметричной (относительно профиля наблюдений) гармонической функции и простой областью регулярности функции комплексного переменного, имеющей на этом профиле те же значения. Последнее позволяет выделить трехмерную область регулярности исследуемого поля по его известным значениям на прямолинейном участке профиля.

Вследствие этого пространственная задача о локализации особенностей сводится к двумерной и решается путем построения «поверхности минимальных глубин», полученной в результате комбинирования единичных решений при различных положениях профиля наблюдений.

Для формализованного описания области особенностей аналитического продолжения потенциальных полей Г.М. Воскобойников ввел понятие «эффективных источников поля, сосредоточенных в его особенностях» и обосновал их соответствие прообразам реальных физических источников аномалий, распределенных ниже земной поверхности с некоторой конечной плотностью.

В этих же работах рассмотрен и другой подход к проблеме локализации особенностей поля, основанный на прямом определении их характеристик с использованием функции Карлемана в качестве ядра интегрального преобразования комплексного логарифмического потенциала.

В частности, разработан алгоритм вычисления обобщенных моментов распределения локальных источников, которые (кроме координат особенностей поля) содержат информацию о «мощности» (избыточной массе или магнитном моменте сечения) аномалиеобразующего объекта и некоторых его геометрических характеристиках.

*О методе особых точек для потенциальных полей в двумерной постановке с использованием гасящей функции комплексного переменного*

Теоретические предпосылки метода особых точек (Воскобойников, 1962, 1965; Воскобойников, Сиротин, 1965) явились фундаментом для его становления и развития, базирующемся на использовании гасящей функции комплексного переменного конкретного вида в качестве ядра интегрального преобразования элементов поля (Воскобойников, Начапкин, 1969).

Основное предназначение гасящей функции состоит в том, чтобы в интегральных преобразованиях можно было свести интегрирование по всей границе области к интегралу лишь по наземной части границы (контуру – в двумерной постановке), где известны исходные данные задачи. Кроме того, она должна быть сконструирована таким образом, чтобы полученное преобразование (называемое «изображением поля») описывало в явном виде вклады типичных особенностей поля и допускало практическую возможность количественного определения их параметров, представляющих геофизический интерес. И наконец, поскольку задача определения особых точек геофизических полей является некорректной (условно корректной) задачей математической физики, то при построении регуляризующего оператора решения на основе формализма гасящих функций важно было определить множество корректности, на котором достигается устойчивость реализующего его вычислительного алгоритма.

В этой работе изложены как теоретические аспекты двумерного варианта метода особых точек, так и методические приемы его непосредственного применения для интерпретации геопотенциальных полей. В частности, Г.М. Воскобойниковым и Н.И. Начапкиным разработан устойчивый алгоритм решения задачи, основанный на вычислении контурного интеграла при различных последовательных значениях параметра регуляризации (определяющего степень затухания гасящей функции с удалением от ее полюса),

зависящего от точности входных данных. Установлена взаимосвязь между наиболее типичными классами форм аномалиеобразующих объектов и параметрами ближайших особых точек, им соответствующим. Разработана принципиальная вычислительная схема алгоритма, позволяющего определять основные числовые характеристики особых точек: комплексную координату в вертикальной плоскости, тип и мощность.

Важнейшим из них является понятие параметра «типа» особенности, который однозначно связан с геометрическими характеристиками аномалиеобразующего объекта, и его в принципе невозможно определить исходя из процедуры аналитического продолжения.

С целью выделения физически содержательных решений задачи из всего множества допустимых решений был предложен корреляционный метод их обработки, основанный на том, что значение полярного угла, определяющего направление на ближайшую особенность поля в разрезе, не зависит от ее типа и может быть вычислено независимо от других параметров. Это дало возможность выделять группы взаимно-коррелирующихся направлений на отдельные особые точки, расположенные на конечном (не произвольно малом) расстоянии между собой для последующего определения их параметров.

При этом вопрос о локализации особых точек в пространстве окончательно решался с учетом повторного определения их параметров при различных положениях профиля наблюдений. В дальнейшем метод был опробован на большом количестве теоретических, модельных и практических примеров и положительно зарекомендовал себя при интерпретации сложных квазидвумерных аномалий (Начапкин, 1976; Воскобойников, Начапкин, 1977, 1980).

Не умаляя безусловных достоинств двумерного варианта метода (определение как координат особой точки, так и ее типа и мощности), тем не менее следует отметить некоторые ограничения области его применения для интерпретации выраженных трехмерных аномалий, когда характер

аномалии не позволяет рассчитывать на то, что получаемые единичные результаты при различных положениях профиля соответствуют одной и той же особенности поля, и сведение задачи к двумерной приводит к потере части информации.

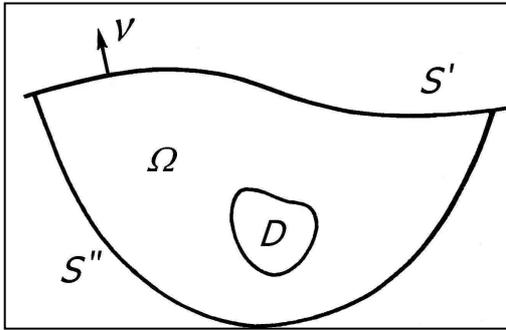
Все это обусловило необходимость разработки нового трехмерного подхода к проблеме определения особенностей гравитационных и магнитных полей, позволяющего непосредственно вычислять пространственные координаты особых точек и определять их параметры, соответствующие трехмерным аномалиеобразующим объектам, а также распространения этого подхода на геофизические поля иной природы, в частности, волновые электромагнитные и сейсмические, возбуждаемые в гармоническом режиме.

*О развитии метода особых точек в трехмерной постановке для потенциальных и волновых геофизических полей*

Математическую основу трехмерного подхода также составили интегральные преобразования элементов поля с ядром из гасящих функций, позволяющих проводить интегрирование по ограниченному участку поверхности, на котором известны исходные данные задачи – «данные Коши» – значения элемента исследуемого поля и его производной по нормали к поверхности, отождествляемой с границей раздела земля-воздух (Воскобойников, Шестаков, 1982). Практически оказывается, что для их формирования достаточно иметь геофизические данные измерений одной составляющей потенциального поля (гравитационного или магнитного), либо двух составляющих напряженности электромагнитного поля, возбуждаемого в гармоническом режиме.

В отличие от двумерного подхода, базирующегося на аппарате теории функций комплексного переменного (ТФКП), дальнейшее развитие общей теории метода в трехмерной постановке, в частности, определение вкладов типичных особенностей в изображение поля и разработка регуляризирующего алгоритма решения задачи по определению их параметров основано на

применении второй формулы Грина (для полей, удовлетворяющих уравнениям Лапласа и Гельмгольца) к элементу поля  $U$  и гасящей функции  $V$  по области  $\Omega$ , включающей исследуемую неоднородность  $D$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема расположения аномалиеобразующего объекта  $D$  во вмещающей области  $\Omega$ , ограниченной поверхностями  $S'$  и  $S''$ .  $v$  – вектор внешней нормали

В работе (Воскобойников, Шестаков, 1982) сформулированы требования, налагаемые на гасящие функции, удовлетворяющие уравнениям эллиптического типа в заданной области их регулярности. В основе построения их конкретного аналитического вида лежит метод разделения переменных (в сферических координатах), с помощью которого находятся частные решения уравнений Лапласа и Гельмгольца, обладающие необходимыми «гасящими» свойствами, чтобы можно было пренебречь вкладом в изображение поля от интеграла по подземной части границы  $S''$ . По аналогии с двухмерной постановкой, помимо координат, трехмерные гасящие функции зависят от целочисленного параметра  $n$ , играющего роль параметра регуляризации решения рассматриваемой условно корректной задачи определения параметров особых точек.

В этой работе изложены также основные конструктивные элементы определения вкладов различных особенностей для полей, описываемых уравнениями Лапласа и Гельмгольца, исходя из соответствующих им фундаментальных решений, и принципы построения вычислительного

алгоритма для определения координат, типа и элементов ориентировки особенности в пространстве трех измерений, что привело в конечном итоге к созданию трехмерного варианта метода особых точек (Воскобойников, Шестаков, 1985).

Приведенные выше аспекты трехмерного варианта метода гасящих функций могут составить основу для разработки алгоритма определения особенностей сейсмического поля (в частности зон дифракции) по исходным данным, допускающим предварительное выделение гармонической составляющей поля смещений (или скоростей смещений), соответствующих чисто продольной или чисто поперечной волне. Однако на практике это не всегда оказывается возможным, поэтому в работе (Воскобойников, Шестаков, 1984) удалось распространить теорию трехмерного варианта метода применительно к векторному уравнению Ламе (при гармоническом характере зависимости от времени), которое описывает поле смещений суммарных упругих колебаний среды.

Математическую основу подхода к определению особенностей векторного поля смещений составила вторая формула Бетти, примененная к вектору смещений и гасящей вектор-функции по области  $\Omega$ , позволяющая реализовать основную идею выполнения интегрирования по ограниченному участку поверхности земли  $S'$  – там, где известны исходные данные задачи.

Для сейсмического поля аналогом нормальной производной в исходных данных выступает вектор напряжений, которым можно пренебречь при физически обоснованных предположениях. В результате в качестве исходных данных выступает лишь один элемент данных Коши – комплексная амплитуда вектора смещений, либо (связанный с ним) вектор скорости смещений, заданные на  $S'$ .

В работе (Воскобойников, Шестаков, 1984) предложен оригинальный способ построения гасящей вектор-функции в виде градиента соответствующей скалярной функции для уравнения Гельмгольца (с волновым числом, зависящим от парамет-

ров Ламе, плотности среды и круговой частоты колебаний сейсмического поля), которая обладает всеми необходимыми гасящими свойствами и позволяет реализовать основные конструктивные элементы регуляризирующего алгоритма решения поставленной задачи. На примере изображения поля для элементарного источника колебаний – гармонически изменяющейся сосредоточенной силы установлена связь с изображением поля дипольного источника в задаче для скалярного уравнения Гельмгольца и показана принципиальная возможность конструирования изображения поля источников более сложной структуры для последующего определения их элементов залегания.

Дальнейшее развитие метода определения особых точек на основе формализма гасящих функций происходило применительно к электромагнитному полю, возбуждаемому в гармоническом режиме или допускающем выделение гармонической составляющей из наблюдаемых данных (например, из данных магнитотеллурического или магнитовариационного профилирования).

В работах (Хачай, Шестаков, 1988, 1990) решен ряд методических вопросов, касающихся оптимизированной технологии подготовки исходных данных задачи по одному только элементу данных Коши и обоснованы отдельные элементы методики интерпретации электромагнитного поля, возбуждаемого в сложнопостроенных средах, продемонстрированные на модельных примерах. Как показала опытная апробация метода, применение его для интерпретации данных измерения двумерного электромагнитного поля возможно, однако требует такого же количества времени и оперативной памяти ЭВМ для решения задачи, что и для трехмерного, поскольку используемое интегральное преобразование элементов поля учитывает трехмерный характер соответствующей гасящей функции.

В связи с этим, разработана отдельная теория определения особых точек электромагнитного поля в двумерной постановке

(в однородной и слоистой вмещающих средах), на основе которой созданы двумерные варианты метода для интерпретации профильных данных. В работах (Шестаков, 1990а, 1990б) изложены физико-математические основы метода, структура алгоритма решения задачи определения параметров особых точек и принципы построения вычислительной схемы по его реализации.

Приводятся результаты модельного опробования вариантов метода по данным, рассчитанным в прямой задаче магнитотеллурического профилирования, на примерах возбуждения *E*-поляризованной плоской волной структурных моделей различных объектов, расположенных в однородном и двухслойном полупространстве.

### ***3. О перспективах развития методики интерпретации экспериментальных данных с использованием метода особых точек***

Есть основания ожидать, что в условиях недостатка априорной информации применение метода особых точек может открыть дополнительные перспективы для развития методики комплексной интерпретации аномалий геофизических полей различной природы, построенную на принципе аналогий, поскольку прямые данные о расположении и характеристиках особенностей «не требуют построения априорной модели объекта» (Жданов, 1974) и могут быть определены в рамках единого методического подхода.

В дальнейшем полученная информация об эффективных источниках может использоваться как самостоятельно (при поисковых геолого-разведочных работах), так и в комплексировании с другими методами, реализующими итеративным образом решение обратной задачи в полном объеме, например, методом подбора с построением эквивалентных семейств решений (Цирульский, Никонова, Федорова, 1980), предоставляя возможность более близкого и адекватного выбора начального приближения (с учетом полученных данных о локализации и параметрах особых точек поля), ускоряющего процесс подбора

и построения физико-геологической модели среды.

Информация о расположении и типе особенностей аналитического продолжения будет способствовать обоснованному установлению класса допустимых объектов при реализации этапа подбора электромагнитных аномалий полями сингулярных источников для последующего решения обратной задачи на основе полученных интегральных или интегродифференциальных уравнений (Мартышко, 1989, 1990, 1994, 1996 и др.; Хачай, 1989, 1990 и др.; Шестаков, 1996).

Эта информация может также использоваться в качестве дополнительной в других методах интерпретации геофизических полей, поскольку позволяет осуществить «привязку» получаемых в них решений с реперными характеристиками особых точек, однозначным образом связанных с физическими источниками аномалий. Так, например, при интерпретации аномалий геопотенциальных полей с использованием системы «VECTOR» (Новоселицкий, Простолупов, 1999) информация о пространственной локализации особых точек дает возможность осуществить оптимальный выбор параметра трансформации для последующей визуализации данных площадных исследований и установления детального местоположения аномалиеобразующих объектов (Мартышко и др., 2001; Новоселицкий и др., 2001).

С целью выяснения принципиальных возможностей метода особых точек для локализации глубинных источников, перекрытых слоем приповерхностных неоднородностей, была опробована методика комплексной интерпретации, состоящая в следующем.

На первом этапе выделяется гравитационное поле от источников в заданном слое, ниже которого предстоит локализовать глубинные неоднородности. Алгоритм такого выделения и практическая его реализация на одном из северных участков Соликамской впадины подробно описан в работе (Мартышко и др., 2002). Предвари-

тельная интерпретация методом особых точек позволяет локализовать ближайшие особенности для более достоверной оценки мощности приповерхностного слоя и выделения его вклада в наблюдаемом поле.

На втором этапе решается задача определения источников поля, образованного вычитанием из наблюдаемого поля эффекта от приповерхностного слоя. При этом разностное поле приобретает более регулярную морфологию, по которой обоснованно можно судить о наличии или отсутствии глубинных аномалиеобразующих объектов, расположенных под приповерхностным слоем. Если аномальный эффект достаточно хорошо выражен, то использование метода особых точек позволяет выявить ближайшие (к подошве приповерхностного слоя) особенности поля, связанные с глубинными плотностными неоднородностями среды.

Опробование приведенной выше технологии комплексной интерпретации аномалий гравитационного поля на одном из участков Соликамской впадины позволило пространственно локализовать особенности поля, а по вычисленным значениям их типа определить основные характерные особенности приповерхностных и глубинных аномалиеобразующих объектов (Шестаков, 2005, 2006).

Практическое применение разработанных вариантов метода особых точек для интерпретации электромагнитных аномалий в настоящее время сдерживает отсутствие необходимых исходных данных, предусмотренных постановкой задачи, – комплексных амплитуд (или модульно-фазовых измерений) напряженности электромагнитного поля, возбуждаемого в гармоническом режиме контролируемым источником (в методах индукционной электроразведки), либо выделенных гармонических составляющих по синхронно измеряемым данным регистрации элементов электромагнитного поля на профиле или площади (в методах магнитотеллурического или магнитовариационного профилирования).

### Заключение

Рассмотренные выше аспекты, касающиеся проблемы исследования особенностей аналитического продолжения потенциальных и волновых геофизических полей, позволяют констатировать, что использование формализма гасящих функций дало возможность осуществить единый методический подход к определению параметров особых точек геофизических полей, описываемых уравнениями Лапласа, Гельмгольца и Ламе на основе строгого решения рассматриваемой условно-корректной задачи в соответствующей постановке (двух- или трехмерной).

Разработанные варианты метода особых точек для интерпретации аномалий потенциальных (гравитационного, магнитного) полей и волнового электромагнитного поля, возбуждаемого в гармоническом режиме, успешно опробованы на ряде теоретических, модельных и практических примеров и показали достаточно высокую результативность как при независимой интерпретации данных измерений, так и в комплексировании с другими методами интерпретации аномалий геофизических полей.

Вместе с тем, не следует рассматривать метод особых точек как универсальный аппарат, пригодный для интерпретации геофизических данных в произвольной физико-геологической обстановке. Как и другие методы, он имеет свою достаточно ограниченную область применения. В частности, метод особых точек заведомо малоэффективен при интерпретации полей, создаваемых структурными неоднородностями среды с плавными границами, так как особые точки таких полей обычно расположены вдали от границ исследуемых структур и связаны с ними сложной зависимостью. В то же время при интерпретации полей, обусловленных структурами типа сбросов, разломов, а также локальными аномалиеобразующими объектами, метод может быть достаточно эффективен. В частности, это практически доказано применительно к интерпретации магнитных

аномалий, связанных с железорудными месторождениями.

Формализованное применение гасящих функций в качестве ядра интегральных преобразований элементов поля приводит к тому, что при получении числовых характеристик особых точек, метод позволяет полностью освободиться как от влияния регионального фона или нормального поля, так и влияния соседних аномалиеобразующих объектов, позволяя проводить поэлементную расшифровку источников сложных аномалий с получением информации об их местоположении и характеристиках, которая может использоваться как самостоятельно, так и в качестве дополнительной к другим методам, что расширяет перспективы совершенствования методики комплексной интерпретации экспериментальных данных, повышающей достоверность построения геолого-геофизической модели изучаемой среды.

### Литература

- Андреев Б.А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике. I // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1947. № 1. С. 8–16.
- Андреев Б.А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике. II // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. № 3. С. 43–50.
- Андреев Б.А. Определение поверхности кристаллического фундамента платформенных областей по магнитным аномалиям // Прикладная геофизика. М.: Гостоптехиздат, 1955. Вып. 13. С. 80–98.
- Бернштейн С.Н. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Харьков: ХГУ, 1956. 95 с.
- Воскобойников Г.М. Функция Карлемана и ее применение к решению некоторых задач геофизики // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 11. С. 1579–1590.
- Воскобойников Г.М. Интегральные преобразования и расположение особенностей логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1965. № 1. С. 76–89.

- Воскобойников Г.М., Сиротин М.И.* Об определении особенностей аналитического продолжения потенциальных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1965. № 12. С. 21–30.
- Воскобойников Г.М., Начапкин Н.И.* Метод особых точек для интерпретации потенциальных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969. № 5. С. 24–39.
- Воскобойников Г.М., Начапкин Н.И.* Теоретические предпосылки и опыт применения метода особых точек к интерпретации сложных магнитных аномалий // Теория и практика применения аналитических методов интерпретации и математического моделирования геофизических полей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С. 3–21.
- Воскобойников Г.М., Начапкин Н.И.* Методические рекомендации по применению метода особых точек для интерпретации потенциальных полей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. 130 с.
- Воскобойников Г.М., Шестаков А.Ф.* Метод гасящих функций и его применение для определения особых точек геофизических полей, удовлетворяющих трехмерным уравнениям Лапласа и Гельмгольца // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 3. С. 62–75.
- Воскобойников Г.М., Шестаков А.Ф.* О методе особых точек применительно к интерпретации сейсмических данных // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 3. С. 35–40.
- Воскобойников Г.М., Шестаков А.Ф.* Метод особых точек для интерпретации геофизических полей, удовлетворяющих трехмерным уравнениям Лапласа и Гельмгольца // Алгоритмы, методика и результаты интерпретации геофизических данных. Киев: Наукова думка, 1985. С. 109–112.
- Голыздра Г.Я.* О связи особых точек гравитационного потенциала с формой возмущающих масс // Вторая конференция молодых геологов Украины. Киев: АН УССР, 1962. С. 127–129.
- Голыздра Г.Я.* О связи особых точек гравитационного потенциала с формой возмущающих масс // Геофизический сборник АН УССР, 1963. Вып. 5 (7). С. 3–9.
- Голыздра Г.Я.* Об особых точках аналитического продолжения производных гравитационного потенциала // Геофизический сборник АН УССР, 1968. Вып. 23. С. 16–27.
- Жданов М.С.* О едином подходе к проблеме интерпретации геофизических аномалий на основе методов продолжения полей // Геология и геофизика. 1974. № 10. С. 129–137.
- Жданов М.С.* Вопросы теории интерпретации глубинных электромагнитных аномалий на основе методов аналитического продолжения // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 9. С. 59–73.
- Заморев А.А.* Об интерпретации значений производных магнитного потенциала возмущающих масс // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1939. № 6. С. 185–191.
- Заморев А.А.* Исследование двумерной обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1941. № 4–5. С. 487–500.
- Заморев А.А.* Определение форм тела по производным внешнего гравитационного потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1942. № 1–2. С. 48–54.
- Иванов В.К.* Распределение особенностей потенциала и пространственный аналог теоремы Поляка // Математический сборник. Новая серия. 1956. Т. 40 (82). № 3. С. 319–338.
- Иванов В.К.* О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 270–272.
- Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. Новая серия. 1963. Т. 61. № 2. С. 211–223.
- Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 6. С. 53–60.
- Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 92 с.
- Мартышко П.С.* Уравнения обратных задач с явно заданным оператором для переменных электромагнитных полей // Применение математических методов и ЭВМ при обработке информации на геологоразведочных работах. Челябинск, 1989. С. 102.
- Мартышко П.С.* Интегриродифференциаль-

ные уравнения обратных задач для переменных электромагнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 5. С. 55–62.

*Мартышко П.С.* Об интерпретации электромагнитных данных // Геофизика. 1994. № 4. С. 41–46.

*Мартышко П.С.* Обратные задачи электромагнитных геофизических полей. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 144 с.

*Мартышко П.С., Новоселицкий В.М., Пруткин И.Л., Шестаков А.Ф.* Проблема разделения источников и решения обратных задач геопотенциальных полей в системе «VECTOR» с целью решения поисково-разведочных и экологических задач // Моделирование стратегии и процессов освоения георесурсов. Волгоград-Пермь, 2001. С. 12–13.

*Мартышко П.С., Новоселицкий В.М., Пруткин И.Л., Шестаков А.Ф.* О разделении источников гравитационного поля по глубине // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 29-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского. Екатеринбург: УГГГА, 2002. Ч. 1. С. 19–25.

*Начапкин Н.И.* О возможностях метода особых точек при интерпретации магнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 5. С. 59–70.

*Никонова Ф.И., Цирульский А.В.* К вопросу о граничных особых точках логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. № 6. С. 76–80.

*Новоселицкий В.М., Простолупов Г.В.* Векторная обработка гравиметрических наблюдений с целью обнаружения и локализации источников аномалий // Геофизика и математика: Материалы 1-й Всерос. конф. М.: ОИФЗ РАН, 1999. С. 104–107.

*Новоселицкий В.М., Мартышко П.С., Бычков С.Г., Шестаков А.Ф., Щербинина Г.П., Простолупов Г.В.* Математические и геологические проблемы в системе «VECTOR» // Геофизика и математика: Материалы второй Всерос. конф. Пермь: Горный институт УрО РАН, 2001. С. 240–247.

*Страхов В.Н.* Об аналитическом продолжении двумерных магнитных полей // Докл.

АН СССР. 1959. Т. 126. № 5. С. 987–989.

*Страхов В.Н.* Опыт интерпретации магнитных аномалий КМА методом построения изолиний DZ в вертикальной плоскости // Прикладная геофизика. 1960. Вып. 27. С. 116–130.

*Страхов В.Н.* О путях построения математической теории интерпретации магнитных и гравитационных аномалий // Прикладная геофизика. 1962а. Вып. 35. С. 95–128.

*Страхов В.Н.* Аналитическое продолжение двумерных потенциальных полей и его использование для решения обратной задачи магнитной и гравитационной разведки I. II // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962б. № 3. С. 307–316; № 4. С. 491–505.

*Страхов В.Н.* Об определении расположения особенностей потенциальных функций // Прикладная геофизика. 1965. Вып. 44. С. 132–161.

*Страхов В.Н.* К теории интерпретации магнитных и гравитационных аномалий на основе аналитического продолжения // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 5. С. 49–53.

*Страхов В.Н.* Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике. Ч. I-II // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969. № 8. С. 30–54; № 9. С. 64–97.

*Страхов В.Н.* К вопросу о единственности решения плоской обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1972. № 2. С. 38–49.

*Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.

*Тихонов А.Н.* О решении некорректных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963а. Т. 151. № 3. С. 501–504.

*Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963б. Т. 153. № 1. С. 49–52.

*Хачай О. А., Шестаков А. Ф.* О некоторых вопросах методики интерпретации переменных электромагнитных полей методом особых точек // Методы интерпретации и моделирования геофизических полей: Сб. науч. трудов. Свердловск: УрО АН СССР,

1988. С. 44–55.

*Хачай О.А.* Об интерпретации двумерных переменных и трехмерных стационарных аномалий электромагнитного поля // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 10. С. 50–58.

*Хачай О.А.* О решении обратной задачи для трехмерных переменных электромагнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 2. С. 55–59.

*Хачай О.А., Шестаков А.Ф.* Об интерпретации методом особых точек двумерных аномалий переменного электромагнитного поля // Геология и геофизика. 1990. № 5. С. 130–133.

*Цирульский А.В.* О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала однородной области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 7. С. 1072–1075.

*Цирульский А.В., Сиротин М.И.* К вопросу об аналитическом продолжении логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. № 1. С. 105–109.

*Цирульский А.В.* О связи задачи об аналитическом продолжении логарифмического потенциала с проблемой определения границ возмущающей области // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1964. № 11. С. 1693–1696.

*Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В.* Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980. 136 с.

*Шестаков А. Ф.* Метод особых точек для интерпретации двумерных монохроматических электромагнитных полей // Изв. АН

СССР. Физика Земли. 1990а. № 2. С. 60–72.

*Шестаков А.Ф.* Двумерный электромагнитный вариант метода особых точек для слоистых сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990б. № 5. С. 62–69.

*Шестаков А.Ф.* Уравнения ТОЗ для монохроматического ЭМ поля с учетом границы раздела двух сред // Теория и практика интерпретации данных электромагнитных геофизических методов: Доклады Российской конф. Екатеринбург: Наука Урал отд., 1996. С. 65–68.

*Шестаков А.Ф.* Некоторые вопросы методики интерпретации аномалий гравитационного поля трехмерным вариантом метода особых точек // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 32-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского. Пермь: Горный институт УрО РАН, 2005. С. 289–291.

*Шестаков А.Ф.* Некоторые аспекты методики интерпретации аномалий гравитационного поля по локализации глубинных источников методом особых точек // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 33-й сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского. Екатеринбург: Институт геофизики УрО РАН, 2006. С. 426–431.

*Шалаев С.В.* Об использовании особых точек потенциальных полей при интерпретации геофизических данных // Прикладная геофизика. 1962. Вып. 33. С. 132–154.

Редакция журнала благодарит всех сотрудников Института, которые помогли своим активным участием выпуску юбилейного номера, посвященного 100-летию Георгия Митрофановича Воскобойникова. Спасибо за то, что вы не только продолжаете дело Георгия Митрофановича, но и помните этого прекрасного человека, умного наставника и мудрого учителя!



Мартышко Петр Сергеевич, член-корр РАН, директор Института геофизики, зав. лаборатории математической геофизики



Уткин Владимир Иванович, член-корр. РАН, советник РАН, лаборатория геодинамики, гл. редактор журнала



Хачай Юрий Васильевич, доктор физ.-мат. наук, лаборатория геодинамики



Федорова Наталья Васильевна, доктор физ.-мат. наук, лаборатория математической геофизики



Шестаков Алексей Федорович, доктор физ.-мат. наук, зав. лаборатории экологической геофизики



Бахтерев Владимир Васильевич, доктор технических наук, лаборатория геодинамики, зам. главного редактора журнала



Хачай Ольга Александровна, доктор физ.-мат. наук, лаборатория скважинной геофизики

Научное издание

**УРАЛЬСКИЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК № 1 (21)**

Рекомендовано к изданию Ученым советом  
Института геофизики УрО РАН

Редактор А р е в к о в а Э. О.  
Компьютерная верстка, макетирование А р е в к о в а Э. О.  
Компьютерная графика У т к и н В. И.  
Корректор С т р о к и н а Л. Г.

Подписано в печать 20.02.2013.  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 6,8  
Уч. - изд. л. 7,6. Тираж 200  
Заказ № 158

620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, 100  
Институт геофизики УрО РАН

Размножено с готового оригинал-макета в типографии  
ООО «ИРА УТК», 620102, г. Екатеринбург, ул. Шаумяна, д. 83

## **Внимание читателей!**

---

В ИНСТИТУТЕ ГЕОФИЗИКИ УРО РАН  
С 2000 ГОДА ИЗДАЕТСЯ

### **«УРАЛЬСКИЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК»**

На страницах журнала публикуются оригинальные теоретические, экспериментальные и методические статьи по геофизике и связанной с ней тематике с учетом специфики геологии Урала и прилегающих территорий. Публикуются также результаты измерения закономерностей пространственного и временного распределения геофизических полей, методические и аппаратные разработки, сообщения и другая информация.

- Рассчитан на широкий круг читателей: геофизиков и геологов, научных работников, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов.
- Периодичность – 2 номера в год.
- Индекс 15608.
- Свидетельство о регистрации: ISSN 1991-0223 от 26.07.2006 г.
- Своевременное оформление подписки через агентство «АРСМИ» или заказы в редакции Института геофизики УрО РАН гарантируют Вам получение журнала. Возможно приобретение номеров журнала за прошлые годы.

**Подписывайтесь, заказывайте и читайте  
«Уральский геофизический вестник»**

---