DOI: 10.25698/UGV.2018.2.5.40 УДК 550.837.6

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ СЛОИСТЫХ СРЕД С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ. ЧАСТЬ I. ОБОБЩЕННО-НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

Ладовский И.В. – Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация. В работе рассматривается новый подход к решению задач линейного сопряжения для стационарных геофизических полей в кусочно-однородных средах. Разработан аналитический метод «сквозного интегрального преобразования» типа свертки с гармоническим почти всюду ядром для решения граничной задачи стационарной теплопроводности для уравнения с переменными (разрывными) коэффициентами. Сформулирована постановка однородных граничных условий Дирихле и Неймана, как предельных по теплопроводности, условий теплового сопряжения. Получено решение геотермической задачи для модели слоистого пласта с условием постоянства температуры в плоскости «нейтрального слоя» на его верхней границе и заданными значениями восходящего теплового потока на нижней границе. Применение обобщенной формулы Грина для потенциала и его разрывных производных требует лишь незначительной корректировки математического формализма, чтобы построить универсальную схему решения задачи теплового сопряжения в рамках классического анализа.

Теория потенциала, задача Дирихле-Неймана, условия теплового сопряжения, слоистая кусочно-однородная среда.

ON THE SOLVING LINEAR CONJUGACY PROBLEM FOR STATIONARY HEAT FIELDS IN PIECEWISE-HOMOGENEOUS MEDIA. PART I. GENERALIZED-CONTINUOUS OPERATOR CONJUGATION PROBLEM

Ladovskiy I.V. – Institute of Geophysics UB of RAS, Yekaterinburg

Abstract. Paper presents a new approach for linear conjugacy problem for stationary geophysical fields in piecewise-homogeneous media. Novel analytical method of integral convolution for boundary value problem of stationary thermal conductivity was created for the equation with variable coefficients. Its kernel is harmonical almost everywhere. Homogeneous boundary conditions of Dirichlet and Neumann were formulated as conditions of thermal conjugacy. Geothermal problem solution for the model of layered stratum under condition of constant temperature in the plane of neutral layer at the top and with given values of rising heat flux on the bottom layer boundary. Usage of generalized Green's formula for the potential and its discontinuous derivative requires only the minor change in mathematical formalism to build universal scheme for heat conjugacy problem in the frames of classical analysis.

Potential theory, Dirichlet-Neumann problem, conditions of thermal conjugacy, layered piecewise-homogeneous medium.

Введение

Разработка новых методов и компьютерных технологий построения количественных моделей глубинного строения земной коры и верхней мантии по комплексу геофизических полей является одним из самых перспективных направлений современных исследований в науках о Земле. Особый интерес представляет круг согласованных прикладных задач, когда различные по своей природе и информативности геофизические поля могут интерпретироваться по единому математическому сценарию. Для этого вполне достаточно, чтобы искомые поля удовлетворяли однотипным уравнениям и схожим граничным условиям поставленной задачи, конечно, если имеются реальные предпосылки для связи входящих в эти уравнения физических параметров среды (Моисеенко и др., 1970; Кутас, Гордиенко, 1971; Шлафштейн и др., 1993; Голованова, 2005; Rybach, Buntebarth, 1982). Установление таких внутренних связей позволяет выделить наибо-

лее устойчивые неоднородности коры и мантии и дать количественную оценку их проявления в аномальных геофизических полях различной эндогенной природы (Геофизическая … , 1987).

Необходимость изучения строения низов коры и верхней мантии настоятельно требует создания целенаправленных методов комплексных глубинных исследований, среди которых информативная составляющая геотермии играет не последнюю роль (Хачай, Дружинин, 1996; 1998). Интерпретация геотермических данных в их взаимосвязи с полями иной природы снижает степень неоднозначности математических моделей и повышает достоверность наших представлений о глубинном строении и вещественном составе структурно геологических комплексов неоднородной геологической среды на разных иерархических уровнях ее организации.

В теории геофизических исследований стационарные поля тепловой, магнитной или электрической природы, наряду с гравитационными полями, относят к классу потенциальных. Количественная интерпретации потенциальных полей опирается на решение граничных задач для уравнения Пуассона. Задачи стационарной теплопроводности для моделей кусочно-однородных сред математически эквивалентны задачам линейного сопряжения в теории потенциала (задачи МИП с учетом размагничивающего эффекта, задачи электроразведки на постоянном токе, метод заряда и др.) (Мартышко, 1996). И в этом смысле методы их решения являются универсальными. Вся разница состоит лишь в виде функции распределения источников первичного поля и условий на границе раздела «земля–воздух» (Гуревич, 1979; Воскобойников, 1973).

Геотермические модели стационарных тепловых полей исходят из распределения двух теплофизических параметров: мощности сторонних источников радиогенной теплогенерации Q и коэффициента теплопроводности λ. Их связывает условие неразрывности для стационарного теплового потока (формула Гаусса): суммарный поток через замкнутую поверхность S, ограничивающую область D, равен суммарной мощности источников внутри этой области:

$$\iint\limits_{S} \mathbf{q}(P_S)\, d\vec{S}_P = \iiint\limits_{D} Q(x_V)\, dV_P \qquad (1)$$

или в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}(\mathbf{q}) = Q. \qquad (2)$$

В неравномерно нагретом твердом теле, когда перепад температуры между составляющими его частями не слишком велик, тепловой поток пропорционален первой степени градиента температуры (Карслоу, Егер, 1964; Лыков, 1967). Для изотропных тел вектор теплового потока $\mathbf{q}$ антинаправлен вектору градиента температуры

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T. \qquad (3)$$

Соотношение (3) – это феноменологический закон теплопроводности Фурье; им характеризуется кондуктивный (или молекулярный) механизм передачи тепла в неподвижной сплошной среде из мест с более высокой в места с более низкой температурой. В таком случае, стационарная температура T будет потенциалом «растекания» векторного поля температурных градиентов (или поля тепловых потоков), а в области свободной от тепловых источников Q функция T будет гармонической. Как математическое постулат, линейная зависимость (3) требует лишь ограниченности градиента температуры, но не накладывает каких-либо условий на величину коэффициента теплопроводности. Поэтому в рамках линейного закона Фурье возможно описание процессов теплопереноса в среде с бесконечно большой или бесконечно малой теплопроводностью. Если теплопроводность среды достаточно высока, то градиент температуры в ней стремится к нулю, а распределение температур будет изотермическим. В противном случае, если теплопроводность среды равна нулю, то в нуль обращается и кондуктивная составляющая теплового потока: тепло не может распространяться в среде, теплопроводность которой характеризуется бесконечно низкой теплопроводностью. Предельные соотношения между полем температур и

тепловых потоков в идеально теплопроводящей ($\lambda \to \infty$) и идеально теплоизолированной среде ($\lambda \to 0$) непосредственно вытекают из феноменологического закона теплопроводности Фурье, т. е. выполняются независимо от уравнения неразрывности (2). Относительно последнего их можно рассматривать в качестве естественных граничных условий. В геотермических моделях кусочно-однородных сред идеально проводящий или теплоизолированный контакт соответствует постановке однородных граничных условий по температуре (задача Дирихле) или по тепловому потоку (задача Неймана) для сопредельных областей. Именно с этих позиций будем рассматривать предельные случаи «бесконечной» или «нулевой» теплопроводности в геотермических моделях кусочно-однородных сред.

В настоящей работе обсуждается постановка и метод решения граничной задачи теплового сопряжения в замкнутой интегральной форме. Краевая задача с условиями IV рода, сохраняя корректность классической постановки, сводится к решению редуцированного уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами (Ладовский, Шестаков, 2009). Интегральные преобразования в пространстве обобщенных функций преобразуют дифференциальный оператор краевой задачи в интегральное уравнение Фредгольма простого слоя (Земанян, 1974; Владимиров, Жаринов, 2000).

Уравнение граничной задачи теплового сопряжения

В среде с переменной теплопроводностью стационарная температура T удовлетворяет линейному уравнению потенциала. На основании (2–3), имеем:

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \lambda \nabla^2 T + (\nabla \lambda \nabla T) + Q = 0. \quad (4)$$

Это линейное дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка с переменными коэффициентами. Для того, чтобы искомая температура T была бы по крайней мере дважды дифференцируемой, коэффициент теплопроводности λ в уравнении (4) должен аппроксимироваться кусочно-гладкой функцией, с разрывами производных $\nabla\lambda$ не выше I-го рода. Это требование теоремы существования (Кошляков и др., 1970; Тихонов, Самарский, 1972). Но, если среда с переменной теплопроводностью состоит из конечного числа контактирующих однородных подобластей, в каждой из которых теплопроводность постоянна, а на границах раздела испытывает конечный скачок, то вместе с ней испытывает скачок и нормальная составляющая градиента температуры. На граничной поверхности контакта разнотеплопроводных сред не определен градиент разрывной функции $\nabla\lambda$ и градиент температуры; не существуют и вторые производные от температуры $\nabla^2 T$ в их классическом понимании. На поверхности разрыва дифференциальные операции утрачивают свой смысл; их заменяют более сглаженные интегральные условия непрерывности температуры и нормальной составляющей теплового потока. Преобразование линейного дифференциального уравнения (4) к требованиям форм теоремы существования приводит к классической постановке задачи теплового сопряжения (Кошляков и др., 1970; Лыков, 1967).

Поясним сказанное примером. Рассмотрим фрагмент модельного разреза кусочно-однородной по теплопроводности среды (рис. 1). Две соприкасающиеся области D_i и D_{i+1} части слоистого пространства R^3 разделяет поверхность S_i. Поверхность S_i достаточно гладкая, т. е. имеет непрерывно вращающуюся касательную плоскость и соответствующее ей непрерывное поле нормалей $\mathbf{N}(S_i)$. За положительное направление нормали условимся выбирать направление в сторону возрастания индекса области, т. е. $D_i \to D_{i+1}$.

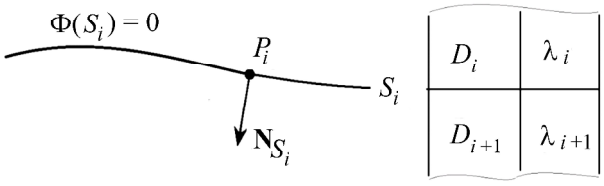

Рис. 1. Фрагмент слоистой среды и геометрия задачи в пространстве R^3

Область D_i заполнена средой с теплопроводностью λ_i и плотностью сторонних источников теплогенерации Q_i. Для каждой части такой среды, где теплопроводность постоянна, уравнение (4) превращается в уравнение Пуассона

$$\nabla^2 T_i + \frac{Q_i}{\lambda_i} = 0. \qquad (5)$$

В непосредственной окрестности двусторонней поверхности S_i Гауссов интеграл (1) преобразуется к интегральной формуле «поверхностной» дивергенции (Светов, Губатенко 1988):

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{q}) = \left(\mathbf{N}_{S_i} \cdot \left(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i\right)\right) = Q_S.$$

И, если плотность поверхностных источников $Q_S = 0$, то мы имеем хорошо известное условие теплового сопряжения. По принятой классификации – это краевое условие IV рода. Оно означает непрерывность нормальной составляющей теплового потока при переходе через границу раздела сред с различной теплопроводностью (Карслоу, Егер, 1964; Лыков, 1967):

$$\lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial N_S}\bigg|_{S_{i+0}} - \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial N_S}\bigg|_{S_{i-0}} = 0. \qquad (6)$$

Еще одно условие на граничной поверхности S_i – условие непрерывности температуры непосредственно следует из линейного соотношения (3): если градиент температуры испытывает разрыв не выше 1-го рода, то сама температура сохраняя непрерывность, испытывает лишь излом.

$$T_{i+1}\big|_{S_{i+0}} = T_i\big|_{S_{i-0}} = 0. \qquad (7)$$

Граничные условия задачи сопряжения (6–7) можно записать в эквивалентной, но более удобной форме через источники простого (или двойного) слоя, выразив их плотность через скачок искомых функций (Мартышко, 1996). Сориентируем поверхность S_i относительно выбранного направления положительной нормали $\mathbf{N}(S_i)$. Правосторонний предел $S_i + 0$ принимается за внешнюю сторону, а левосторонний $S_i - 0$ – за внутреннюю сторону ориентированной граничной поверхности (см. рис. 1). Согласно граничным условиям (6–7), при переходе с внешней на внутреннюю сторону поверхности S_i температура остается непрерывной, а градиент температуры испытывает скачок:

$$\left[T\right]_{S_i} = 0;$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial N}\right]_{S_i} = \left(\frac{\partial T_{i+1}}{\partial N_{S_i}} - \frac{\partial T_i}{\partial N_{S_i}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}}\right)\left(\frac{\partial T_{i+1}}{\partial N_{S_i}} + \frac{\partial T_i}{\partial N_{S_i}}\right).$$

Скачок приграничных градиентов, спроектированных на направление внешней нормали, создает поверхностный простой слой на S_i, плотность которого $\nu(S_i)$ пропорциональна контрасту теплопроводности сопредельных сред (Ладовский, 1990; 2002):

$$\nu(S_i) = \left[\frac{\partial T}{\partial N}\right]_{S_i} =$$

$$= \left(\frac{\partial T_{i+1}}{\partial N_{S_i}} - \frac{\partial T_i}{\partial N_{S_i}}\right) = \varepsilon_i \left(\frac{\partial T_{i+1}}{\partial N_{S_i}} + \frac{\partial T_i}{\partial N_{S_i}}\right), \qquad (8)$$

где $\varepsilon_i = (\lambda_i - \lambda_{i+1})/(\lambda_i + \lambda_{i+1})$ – параметр теплопроводной контрастности.

Разрывный характер изменения теплофизических свойств среды и вытекающая из него необходимость постановки условий сопряжения на границах кусочно-однородных сред – вот сдерживающий фактор развития методов классического анализа. Дело в том, что в эти условия не входят явные значения граничных функций; указана лишь степень гладкости сопрягаемых на границах тепловых полей. Ветви кусочно-гладкого решения тепловой задачи удовлетворяют системе частных уравнений, каждое из которых задано в своем пространственном базисе, но не замкнуто граничными условиями. В результате утрачивается существенная часть классического формализма решения краевых задач. Как в методе разделения переменных, так и в идейно близком ему методе интегральных преобразований возникает принципиальный вопрос о «сшивании» частных решений, построенных по различным системам собственных функций. Как правило,

интегральные преобразования в конечных (или в бесконечных) пределах не применяют по тем пространственным переменным, в направлении которых свойства среды меняются скачкообразно.

Разрыв коэффициентов в дифференциальном уравнении не обязательно сводить к граничным условиям; можно, не меняя уравнение, доопределить особенности коэффициентов на границах раздела при помощи разрывных дифференцируемых функций, типа функции Хевисайда (Ладовский, Шестаков, 2009). В основе такого подхода лежат эвристические построения, заимствованные из теории обобщенных функций. «Если рассматривать уравнение краевой задачи на пространстве обобщенных функций, то в этом случае нет необходимости вводить на каких либо особых поверхностях специальные граничные условия, достаточно понимать ... дифференциальные операторы в обобщенном смысле» (Светов, Губатенко, 1988, с. 21).

Обобщенно-непрерывный оператор задачи сопряжения тепловых полей

Граничные условия (8) задачи сопряжения можно рассматривать, как обобщенные функции (интегралы) сингулярного оператора (4), особенности которого сосредоточены на поверхности носителя S_i. Граничная поверхность обязательно должна быть двухсторонней, поскольку она разграничивает области существования кусочно-гладких решений в сопредельных областях D_i и D_{i+1}. Скачок нормальной составляющей градиента температуры на граничной поверхности S_i компенсируется скачком обратных коэффициентов теплопроводности. В таком случае, если доопределить соответствующим образом значения градиентов температуры и коэффициентов *обратной* теплопроводности на поверхности разрыва, то можно избежать процедуры построения частных решений для системы уравнений (5). Континуальная постановка задачи сопряжения предполагает получение единого обобщенно непрерывного дифференциального оператора прямой задачи сопряжения для кусочно-однородного пространства R^3 как в точках непрерывности, так и в точках разрыва материальных параметров среды.

В окрестности граничной поверхности $S_i \pm 0$ зададим правильные (по Ляпунову) лево- и правосторонние предельные значения нормальной составляющей градиента температуры:

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial N_{S_i}}\right|_{S-0} = \frac{1}{\lambda_i}\left(\mathbf{N}_{S_i}\cdot\mathbf{q}_i\right);$$

$$\left.\frac{\partial T_{i+1}}{\partial N_{S_i}}\right|_{S+0} = \frac{1}{\lambda_{i+1}}\left(\mathbf{N}_{S_i}\cdot\mathbf{q}_{i+1}\right).$$

На самой поверхности S_i прямые значения температуры и нормальной составляющей теплового потока (устранимый разрыв) доопределим по непрерывности:

$$T(S_i) = \frac{1}{2}\left(T_{i+1}(S+0) + T_i(S_i-0)\right);$$

$$\left(\mathbf{N}_{S_i}\cdot\mathbf{q}(S_i)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{N}_{S_i}\left(\mathbf{q}_{i+1}(S_i+0) + \mathbf{q}_i(S_i-0)\right).$$

По аналогии, прямое значение нормальной составляющей градиента температуры на поверхности S_i (разрыв 1-го рода) вычислим через полусумму Дирихле его право- и левосторонних пределов (Кошляков и др., 1970):

$$\frac{\partial T(S_i)}{\partial N_{S_i}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T_{i+1}(S_i+0)}{\partial N_{S_i}} + \frac{\partial T_i(S_i-0)}{\partial N_{S_i}}\right). \quad (9)$$

Аксиоматический постулат Дирихле однозначно определяет прямое значение разрывной теплопроводности на поверхности S_i. Заменяя в (9) компоненты градиента на компоненты теплового потока, получаем:

$$\frac{\left(\mathbf{N}_{S_i}\cdot\mathbf{q}(S_i)\right)}{\lambda(S_i)} = \frac{1}{2}\mathbf{N}_{S_i}\cdot\left(\frac{\mathbf{q}_{i+1}(S_i+0)}{\lambda(S_i+0)} + \frac{\mathbf{q}_i(S_i-0)}{\lambda(S_i-0)}\right)$$

или, в силу непрерывности нормальной составляющей теплового потока:

$$\frac{1}{\lambda(S_i)} = \frac{1}{\lambda(S_i+0)} +$$

$$+\frac{1}{\lambda(S_i-0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} + \frac{1}{\lambda_i}\right). \quad (10)$$

Прямое значение коэффициента теплопроводности на границе контакта сопредельных сред равно гармоническому среднему его право- и левосторонних значений.

Обозначим $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ – координаты произвольной точки R^3 относительно некоторого начала (точки звездности) областей D_i. Уравнение гладкой поверхности S_i в декартовых координатах зададим неявной функцией переменных x:

$$\Phi(S_i) = \Phi_i(x) = \Phi_i(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = 0;$$

$$\Phi(x) \subset C^1.$$

При помощи символической ступенчатой функции Хевисайда, заданной на множестве точек Евклидова пространства $D_i \bigcup D_{i+1}$, определим функцию области, параметризованную уравнением ее граничной поверхности $\Phi(x)$ (Владимиров, Жаринов, 2000). На самой граничной поверхности функцию области доопределим через полусумму Дирихле ее право- и левосторонних значений:

$$\mathrm{H}(\Phi) = \begin{cases} 1, \; x = x_1 \in D_{i+1}, \; \Phi_i(x) > 0 \\ \dfrac{1}{2}, x = x_S \in S_i, \; \Phi_i(x) = 0 \\ 0, x = x_2 \in D_i \;\; \Phi_i(x) < 0. \end{cases}$$

Градиент функции области коллинеарен вектору нормали к ограничивающей ее поверхности (Гельфанд, Шилов, 1959), а обобщенная производная ступенчатой функции равна сингулярной дельта-функции, сосредоточенной на поверхности разрыва:

$$\nabla \mathrm{H}(\Phi_i) = \delta_S(\Phi_i) \otimes \nabla \Phi_i = \mathbf{N}_{S_i} \otimes \delta_S(\Phi_i). \quad (11)$$

Пусть $\lambda(x)$ переменный коэффициент теплопроводности среды в области $D_i \bigcup D_{i+1}$. Для слоистой модели $\lambda(x)$ – это кусочно-непрерывная функция с разрывом 1-го рода на границе раздела сред $S_i(x)$; $x \in S_i$. Функциональную зависимость разрывной теплопроводности от координат можно выразить через ступенчатую символическую функцию области H(Φ). Задаваясь величиной скачка коэффициента теплопроводности и его прямым значением (10) на поверхности S_i, построим линейный по H(Φ) эвристический закон изменения обратной теплопроводности (Ладовский, Шестаков, 2009):

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda_i} + \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right) \cdot \mathrm{H}(\Phi_i) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_i}; & x \in D_i, \; \Phi_i(x) < 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\lambda_{i+1}} + \dfrac{1}{\lambda_i}\right); & x \in S_i, \; \Phi_i(x) = 0 \\ \dfrac{1}{\lambda_{i+1}}; & x \in D_{i+1}, \; \Phi_i(x) > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Выразим коэффициенты уравнения (4) через ступенчатую (импульсную) функцию обратной теплопроводности и, вычислив все требуемые производные, построим обобщенно непрерывный оператор прямой задачи. Перепишем уравнение (4) в эквивалентной форме:

$$\nabla^2 T + \frac{\nabla\lambda(x)}{\lambda(x)} \nabla T + \frac{Q(x)}{\lambda(x)} = 0, \quad x \in R^3. \quad (13)$$

Второй (градиентный) член уравнения (13) содержит произведение трех разрывных функций. Такого произведения не существует (Владимиров, Жаринов, 2000). Однако:

$$\frac{\nabla\lambda(x)}{\lambda(x)} \nabla T = -\nabla\left(\frac{1}{\lambda(x)}\right) \cdot \lambda(x) \nabla T = \nabla\left(\frac{1}{\lambda(x)}\right) \mathbf{q}(x).$$

Здесь произведение одной разрывной функции (обратной теплопроводности) на непрерывную функцию (нормальную составляющую теплового потока) безусловно существует. Вычислим градиент символической функции обратной теплопроводности (12) как обобщенный градиент разрывной функции. Учитывая (11), получим

$$\nabla\left(\frac{1}{\lambda(x)}\right) = \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right) \nabla \mathrm{H}(\Phi_i) =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right) \delta_S(\Phi_i) \otimes \nabla \Phi_i =$$

$$= \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}\lambda_i}\right) \left(\mathbf{N}_{S_i} \otimes \delta_S(\Phi_i)\right).$$

Граничные поверхности раздела S_i разнотеплопроводных сред служат носителями δ функций, а их сомножителями являются непрерывные функции нормальной состав-

ляющей теплового потока. Следовательно, при $x \in S_i$ имеем:

$$\left(\mathbf{N}_{S_i} \cdot \mathbf{q}\right)\Big|_{S_i} = \lambda(x_S)\left(\mathbf{N}_{S_i} \cdot \nabla T\right) = 2\left(\frac{\lambda_{i+1}\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_{i+1}}\right)\left(\mathbf{N}_{S_i} \cdot \nabla T\right)_{S_i}.$$

Градиентный член в уравнении (13) преобразуется к виду, характерному для потенциала простого слоя с объемной сингулярной плотностью (Кошляков и др., 1970; Владимиров, Жаринов, 2000):

$$\nabla^2 T - \nu(S_i) \otimes \delta_S(\Phi_i) + \frac{Q(x)}{\lambda(x)} = 0, \quad (14)$$

где $\nu(S_i)$ – заданная на S_i поверхностная плотность источников простого слоя:

$$\nu(S_i) = \left(\frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}\lambda_i}\right)\lambda(x_S)\left(\mathbf{N}_{S_i} \cdot \nabla T\right)\Big|_{S_i} = 2\varepsilon_i \frac{\partial T(x_S)}{\partial N_{S_i}}. \quad (15)$$

Здесь коэффициент $\varepsilon_i = (\lambda_i - \lambda_{i+1})/(\lambda_i + \lambda_{i+1})$ обозначает тот же самый параметр теплопроводной контрастности, ранее определенный в (8) из граничных условий сопряжения. И, если учесть, что прямое значение нормальной производной температуры равно полусумме (9) своих предельных значений в окрестности точек разрыва, то представления (8) и (15) для плотности простого слоя оказываются тождественными. Это лишний раз подтверждает правильность эвристического выбора ступенчатой аппроксимации (12) для символической разрывной функции обратной теплопроводности.

Обобщенно непрерывный оператор (14) является, безусловно, корректным оператором не только в точках непрерывности, но и в точках разрыва *обратного* коэффициента теплопроводности и соответствует континуальной постановке задачи сопряжения «без граничных условий». Поэтому само уравнение (14), в котором простой слой на S_i с объемной сингулярной плотностью заменяет граничные интегральные условия теплового сопряжения, будем называть уравнением в редукции контраста разнотеплопроводных сред (Ладовский, 2002; Ладовский, Шестаков, 2009).

Интегральная формула Грина

Граничная задача теплового сопряжения (5–7) сводится к решению редуцированного уравнения (14) с разрывными коэффициентами. Интегральные преобразования в пространстве обобщенных функций составляют алгоритмическую основу операционных методов его решения (Земанян, 1974). В классе поверхностей, параметризованных Евклидовым расстоянием $r(x) = |x|$, подходящим интегральным преобразованием в R^3 будет преобразование типа свертки с гармоническим почти всюду ядром. Подобное преобразование эквивалентно применению методов теории потенциала (Кошляков и др., 1970; Тихонов, Самарский, 1972).

Понятие обобщенных функций $f(x)$ и ее обобщенных производных $f^{(\alpha)}(x)$ связывают с существованием определенных интегралов (линейных непрерывных функционалов), заданных на множестве бесконечно дифференцируемых (в классическом смысле) основных финитных функций $\varphi(x)$ Евклидова пространства R^3 (Гельфанд, Шилов, 1959)

$$(f, \varphi) = \int_{R^3} f(x) \cdot \varphi(x) dx,$$

$$\left(f^{(\alpha)}, \varphi\right) = \int_{R^3} f^{(\alpha)}(x) \cdot \varphi(x) dx = (-1)^{(\alpha)} \int_{R^3} f(x) \cdot \varphi^{(\alpha)}(x) dx.$$

Если область интегрирования не ограничена, то основные функции подчиняются условиям регулярности на бесконечности:

$$\lim_{|x| \to \infty} \varphi^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с разрывом не выше 1-го рода. На множестве основных функций $\varphi(x)$ производная обобщенной функции $f(x)$ «n» порядка определяется сингулярностью «n – 1» порядка (Гельфанд, Шилов, 1959):

$$f^{(n)}(x) \sim \delta^{(n-1)}(x); \quad f'(x) = \delta^{(0)}(x) = \delta(x).$$

Для обобщённой функции нескольких переменных частные производные вычисляются аналогично, с учётом разрыва функции по всем направлениям $(x) = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$. В пространстве R^3 обобщенный лапласиан кусочно-непрерывной функции $f(x)$, помимо регулярной составляющей, выражается через конечные скачки самой функции и ее производных в направлении нормали к поверхности разрыва (Владимиров, Жаринов, 2000).

$$\nabla^2 f = \{\nabla^2 f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial N}\right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial N}([f]\delta_S), \quad (16)$$

где $\{\nabla^2 f\}$ – лапласиан регулярной части функции; f и $\left[\frac{\partial f}{\partial N}\right]_S$ – скачок самой функции и ее первых производных по направлению нормали к поверхности S.

Кусочно-гладкая функция температуры $T(x)$ в пространстве R^3 удовлетворяет подобному (16) дифференциальному уравнению (14) с сингулярными коэффициентами.

Сравнивая (14) и (16), приходим к следующему заключению. Гладкое решение задачи сопряжения обеспечивает ньютоновский потенциал «нормального» температурного поля. Для этого достаточно, чтобы плотность источников объемного потенциала была ограничена в R^3 (Тихонов, Самарский, 1972)

$$\{\nabla^2 T\} = \nabla^2 W = -\frac{Q(x)}{\lambda(x)}.$$

Потенциал простого слоя на S_i определяется величиной скачка (8) первых производных температуры по выбранному направлению нормали

$$\nu(S_i) = \left[\frac{\partial T}{\partial N}\right]_{S_i} = \left(\frac{\partial T_{i+1}}{\partial N_{S_i}} - \frac{\partial T_i}{\partial N_{S_i}}\right) = 2\varepsilon_i \frac{\partial T(x_S)}{\partial N_{S_i}}.$$

Скачок температуры равен нулю в силу ее непрерывности на $[T]|_{S_i} = 0$.

В основе операционного метода решения редуцированного уравнения (14) лежит метод сквозных интегральных преобразований. Если поверхность S параметризована Евклидовым расстоянием, то подходящим интегральным преобразованием в R^3 будет преобразование типа свертки с гармоническим почти всюду ядром.

Пусть $A(x)$ – некоторая фиксированная точка вычисления поля и $P(x)$ текущая переменная точка интегрирования в пространстве R^3. Определим Евклидово расстояние от точки A до точки P по формуле

$$r_{AP} = |x_A - x_P| = \sqrt{\sum (x_A - x_P)^2}.$$

Причем

$$r_{AP} = r_{AP}^{+}, \text{ при } x_A = x_2 \in D_{i+1};$$

$$r_{AP} = r_{AP}^{-}, \text{ при } x_A = x_1 \in D_i.$$

Обобщенная функция обратных расстояний $(r_{AP})^{-1}$ определяет сингулярный функционал $\nabla^2(1/r_{AP})$ на множестве основных функций $\varphi(x)$ пространства R^3:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r_{AP}}\right) = -4\pi\delta(x_A - x_P). \quad (17)$$

Операция свертки (символ $\otimes$) на множестве функций с бесконечным носителем $R^3\backslash\{0\}$ (за исключением множества меры нуль) является коммутативным оператором. Следовательно (Гельфанд, Шилов, 1959):

$$\left(\left(\nabla^2 T \otimes \frac{1}{r_{AP}}\right), \varphi\right) = \left(\left(\nabla^2 \frac{1}{r_{AP}} \otimes T\right), \varphi\right). \quad (18)$$

Свертка обобщённой функции лапласиана (14) с функцией обратных расстояний приводит к интегральной формуле:

$$-\iiint_{R^3} \frac{Q(x_P)}{\lambda(x_P)} \frac{1}{r_{AP}} dV_P + \iint_S \frac{\nu(x_P)}{r_{AP}} dS_P =$$

$$= -4\pi \iiint_{R^3} T(x_P)\delta(x_A - x_P) dV_P,$$

δ – функция правой части снимает интеграл по пространственным переменным, и мы приходим к интегральной форме решения задачи для уравнения (14):

$$T(x_A) = W(x_A) - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\nu(x_P)}{r_{AP}} dS_P, \quad x_A \in R^3;\ x_P \in S. \quad (19)$$

Здесь $W(x_A) \subset C^1$ – объемный (ньютоновский) потенциал «нормального» поля источников объёмной теплогенерации лока-

лизованных в пространственных областях

$$V_c = V_i \bigcup_{i+1} \subset R^3;$$

$$W(x_A) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_C} \frac{Q(x_C)}{\lambda(x_C)} \frac{1}{r_{AC}} dV_C; \quad (20)$$

$$x_A \in R^3, \quad x_C \in V_C.$$

$\Pi(x_A) \subset C^0$ – поверхностный потенциал простого слоя вторичных источников, наведенных на границе S_i раздела разнотеплопроводных сред:

$$\Pi(x_A) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \frac{\nu_i(x_P)}{r_{AP}} dS_P, \quad (21)$$

$$x_A \in R^3; \; x_P \in S_i.$$

Подчеркнем, что преобразование свертки применяется не отдельно по каждой области D_i и D_{i+1}, а по их объединению $D_i \bigcup D_{i+1} \subset R^3$. Простой слой на S_i обеспечивает выполнение граничных условий (6–7) и требуемую гладкость сопряжения интегральных трансформаций во всем неограниченном пространстве. В этом и состоит суть операционного метода сквозных интегральных преобразований.

Функция температуры (19) непрерывна в пространстве R^3. Это следует из определения простого слоя. Градиент температуры уже разрывная функция, связанная с поведением особого интеграла на S_i

$$\nabla_A T(x_A) = \nabla_A W(x_A) - \frac{1}{4\pi} \nabla_A \iint_S \frac{\nu(x_P)}{r_{AP}} dS_P.$$

Полагая $x_A = x_S$, получаем интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода относительно плотности простого слоя $\nu(x_S)$:

$$\frac{\nu(x_S)}{2\varepsilon} + \frac{1}{4\pi} \iint_S \nu(x_P) \frac{\partial}{\partial N_A} \frac{1}{r_{AP}} dS_P = \Gamma_W, \quad (22)$$

где $\nu(x_S)$ пропорциональна прямому значению (15) нормальной составляющая градиента температуры на поверхности S; Γ_W – проекция градиента поля объёмных источников на направление внешней нормали.

$$\nu(x_S) = \frac{\partial T_1(x_S)}{\partial N} - \frac{\partial T_2(x_S)}{\partial N} = 2\varepsilon \cdot \left(\vec{N}_A \cdot \nabla_A T(x_S)\right);$$

$$\Gamma_W = \left(\vec{N}_A \cdot \nabla_A W\right) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{R^3} \frac{Q(x_P)}{\lambda(x_P)} \frac{\partial}{\partial N_A} \left(\frac{1}{r_{AP}}\right) dV_P.$$

Необходимым условием разрешимости особого интегрального уравнения (22) является закон сохранения теплоты в форме (1): поток тепла через замкнутую поверхность S, ограничивающий некоторый объем, равен суммарной величине источников, находящихся внутри S.

$$\iiint_{V_2} Q_2(x_P) dV_2 = \iiint_{V_2} \operatorname{div}(\vec{q}) dV_2 =$$

$$= \iint_S q_N(x_S) dS_P = -\frac{\lambda(x_S)}{2\varepsilon} \iint_S \nu(x_S) dS_P.$$

Откуда следует

$$\iint_S \nu(x_S) dS_P = -\frac{2\varepsilon}{\lambda(x_S)} \iiint_{V_2} Q_2(x_P) dV_2 = \quad (23)$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \iiint_{V_2} Q_2(x_P) dV_2.$$

Суммарная плотность простого слоя равняется нулю в двух случаях. Первый представляется тривиальным ($\lambda_1 = \lambda_2$); второй, в силу его конструктивности, заслуживает внимания: интеграл по поверхности простого слоя, ограничивающей замкнутую область гармоничности функции ($Q_2 = 0$) обращается в нуль.

$$\iint_S \nu(x_S) dS_P = 0.$$

Таким образом, решение граничной задачи сопряжения в классе поверхностей, параметризованных Евклидовым расстоянием $r(x) = |x|$, сводится к интегральному представлению (19) с неявно заданным оператором и порождает необходимость решения уравнения Фредгольма 2-го рода (22) при условии ортогональности (23) его собственных функций. В теории потенциала подобное преобразование успешно применяется при решения прямых задач Дирихле или Неймана с явно заданными односторонними граничными условиями. (Кошляков и др., 1970; Тихонов, Самарский, 1972; Земанян, 1974). В задачах сопряжения формула Грина впервые была применена Г.М. Воскобойниковым для вывода интегрального уравнения относительно плотности двойного слоя примени-

тельно к стационарным электромагнитным полям (Воскобойников, 1973). Этот подход получил дальнейшее развитие при решении обратной задачи электроразведки на постоянном токе (Мартышко 1983; 1986) и задачи магниторазведки (задачи МИП) с учетом размагничивающего эффекта в параметризованных классах локальных объектов. И в этом направлении исчерпывающие результаты обобщены в работе (Мартышко, 1996).

Выводы

Развитие методов количественной интерпретации потенциальных гравитационных и магнитных полей с построением трехмерных сеточных моделей распределения плотности и намагниченности предопределило возможность верификации искомых параметров в полях принципиально иной эндогенной природы – полях стационарных температур и тепловых потоков. Сохранение преемственности алгоритма численных расчетов потребовало решения прямой задачи геотермии для сложнопостроенной модели неоднородной по теплопроводности среды.

Граничные задачи потенциала для моделей кусочно-однородных сред описываются дифференциальными уравнениями с сильным разрывом, когда в пространстве допустимых решений не выполняются необходимые условия непрерывности их низших производных. Границы контакта сопредельных сред – это линии разрыва коэффициентов дифференциального оператора краевой задачи, вдоль которых требуется «сшивание» отдельных ветвей кусочно-гладких решений. Подобные задачи относятся к классу задач линейного сопряжения. *Их классическая постановка* предполагает в окрестности разрывов замену дифференциального оператора его интегральным аналогом – граничными условиями IV рода. При использовании аппарата обобщенных функций можно избежать процедуры построения частных решений для каждой однородной области и последующего их сшивания на границах сопредельных сред. Основанный на этой концепции континуальный подход для кусочно-однородной модели безграничной среды, предполагает получение единого оператора решения прямой задачи для соответствующего потенциала (температуры) в произвольной точке пространства как в точках непрерывности, так и в точках разрыва материальных параметров среды.

Концепция континуального подход основана на аналитической аппроксимации *обратного коэффициента разрывной теплопроводности* на контакте сопредельных сред и корректного построения обобщенно-непрерывного дифференциального оператора задачи теплового сопряжения. Искомая температура, как обобщенная функция, заданная на множестве сверточных трансформант обратных расстояний, записывается в виде интегрального уравнения обобщенной формулы Грина.

Правильно выбранная стратегия континуального подхода к решению граничных задач сопряжения для моделей кусочно-однородных сред (граничных задач с условиями IV рода) позволяет получить замкнутую аналитическую формулу для достаточно сложной геометрии среды и, в конечном итоге, построить унифицированный *аддитивный алгоритм* вычисления стационарных тепловых полей в неоднородных средах.

Петрофизическими исследованиями установлены достаточно устойчивые связи между теплогенерацией и плотностью пород земной коры. Стационарная часть теплового потока связана с радиогенными источниками тепла. Энергетическое взаимодействие коры и мантии задается посредством глубинного условия по тепловому потоку. Данные об измеренных температурах и вычисляемом тепловом потоке представлены по редкой сети выстоявшихся скважин с достаточно большой погрешностью (до 15%) (Дучков и др., 2013). Одномерные определения теплового потока, полученные по редкой сети выстоявшихся скважин, не позволяют воспроизвести все детали тонкой структуры верхней части геотермического разреза земной коры. И это лишает практической целесообразности решение обратной задачи геотермии в ее

полной постановке.

Аномалии наблюденного гравитационного поля можно объяснить распределением аномальных масс в приповерхностном слое, мощность которого составляет 10–15 км, так называемый «гравиактивный слой». В пределах Уральских структур эта задача усложняется еще и тем, что аномалии, создаваемые глубинными источниками, в значительной степени компенсируются аномалиями, порожденными источниками в средней части разреза. Тем не менее, гравитационное поле, безусловно, содержит информацию как о средней, так и от более глубоких частей земной коры и верхов мантии (Мартышко и др., 2016). Измеряемый в скважинах приповерхностный тепловой поток характеризует усредненный вещественный состав горных пород на всю мощность земной коры, включая поток из мантии. Совместная интерпретация тепловых и гравитационных полей в их статистической взаимозависимости позволяет решить проблему выбора интегральной теплогенерации земной коры и определить глубинную составляющую теплового потока на границе «кора–мантия». Таким образом, уже на начальном этапе комплексного моделирования просматривается простой и весьма информативный метод использования тепловых и гравитационных полей при региональных исследованиях. Созданию алгоритма количественной интерпретации при решении практических задач прикладной геотермии будет посвящена ЧАСТЬ II настоящей работы.

Литература

Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 400 с.

Воскобойников Г.М. О вычислении стационарных электромагнитных полей в некоторых кусочно-однородных средах // Изв. АН СССР. Физика земли. 1973. № 9. С. 63–75.

Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 979 с.

Геофизическая модель тектоносферы Европы. Киев: Наукова думка, 1987. 184 с.

Голованова И.В. Тепловое поле Южного Урала. М.: Наука, 2005. 190 с.

Гуревич Ю.М. Учет влияния границы земля–воздух при вычислении магнитных полей токов // Электроразведка методом заряда с изменением напряженности магнитного поля. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С. 78–86.

Дучков А.Д., Соколова Л.С., Аюнов Д.Е. Электронный геотермический атлас Сибири и Дальнего Востока (2009–2012) // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2013. Т. 2. № 3. С. 153–157.

Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974. 399 с.

Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

Кутас Р.И., Гордиенко В.В. Тепловое поле Украины. Киев: Наукова думка, 1971. 140 с.

Ладовский И.В. Об аналитическом решении потенциальных краевых задач в кусочно-однородных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 5. С. 35–46.

Ладовский И.В. Формула Грина и интегральное уравнение граничной задачи стационарной теплопроводности // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. Часть 1. Екатеринбург: Ур О РАН, 2002. С. 94–101.

Ладовский И.В., Шестаков А.Ф. О решении задач линейного сопряжения для стационарных геофизических полей в кусочно-однородных средах // Уральский геофизический вестник. 2009. № 2(15). С. 46–56.

Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

Мартышко П.С. О решении обратной задачи электроразведки на постоянном токе для произвольных классов потенциалов // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 1. С. 87–92.

Мартышко П.С. О решении прямой и обратной трехмерных задач МИП в параметрических классах // Изв. АН СССР. Физика

Земли. 1983. № 3. С. 52–57.
Мартышко П.С. Обратные задачи электромагнитных геофизических полей. Екатеринбург, 1996. 143 с.
Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН, 2016. 94 с.
Моисеенко У.И., Соколова Л.С., Истомин В.Е. Электрические и тепловые свойства горных пород. Новосибирск: Наука, 1970. 68 с.
Светов Б.С., Губатенко В.П. Аналитические решения электродинамических задач. М.: Наука, 1988. 344 с.
Тихонов А.Н., Самарский. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
Хачай Ю.В., Дружинин В.С. Возможности применения геотермии для восстановления динамики переходной зоны мантии Урала // Глубинное строение и развитие Урала. Екатеринбург: Наука, 1996. С. 298–306.
Хачай Ю.В., Дружинин В.С. Геотермический разрез литосферы Урала вдоль широтных профилей ГСЗ // Физика Земли. 1998. № 1. С. 67–70.
Шлафштейн Е.Е., Сердюкова А.С., Ратнер В.Б., Алексеев В.В., Шлафштейн Г.А., Новикова А.А. Основы метода разделения и идентификации магматических пород по петрофизическим и петрохимическим характеристикам // Физика Земли. 1993. № 10. С. 60–81.
Rybach L., Buntebarth G. Relationships between the petrophysical properties density, seismic velocity, heat generation, and mineralogical constitution // Earth Planet Sci. Lett. 1982. V. 57. P. 367–376.