

На правах рукописи



Миндубаев Мансур Габдрахимович

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ГЕНЕРАЦИИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И
ВОЗНИКНОВЕНИЯ МАК-ВОЛН ВО ВНЕШНЕМ ЯДРЕ ЗЕМЛИ
(«НЕУПРУГОЕ» ПРИБЛИЖЕНИЕ)**

Специальность 25.00.10 –

Геофизика, геофизические методы поиска полезных ископаемых

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург - 2007

Работа выполнена в Институте геофизики УрО РАН

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор

Хачай Юрий Васильевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор

Фрик Пётр Готлобович

доктор физико-математических наук,
профессор

Соколов Дмитрий Дмитриевич

Ведущая организация:

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

Защита состоится 17 мая 2007г. в 10 часов на заседании Диссертационного
Совета Д004.009.01 Института геофизики УрО РАН
по адресу г. Екатеринбург, ул. Амундсена, 100

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института геофизики УрО
РАН

Автореферат разослан « 10 » апреля 2007 г.

Ученый секретарь Диссертационного Совета
доктор физико-математических наук, профессор



Ю.В.Хачай

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы.

Изучение магнитного поля Земли с использованием обсерваторских, аэро- и спутниковых измерений позволяет ответить на вопросы о динамике магнитного поля за время инструментальных наблюдений. Интерпретация археомагнитных и палеомагнитных данных позволяет расширить временной диапазон сведений о динамике геомагнитного поля вплоть до возраста древнейших образцов горных пород, в которых сейчас удастся установить палеонамагниченность.

В настоящее время описание наблюденной динамики геомагнитного поля, проявлениями которой являются процессы изменения магнитного момента, вековые вариации, западный дрейф, инверсии и т.д. опирается на теорию гидромагнитного динамо (МГД-динамо). Основными условиями реализации МГД-динамо является наличие определенного вида структуры течений во внешнем ядре Земли и выполнение условий «вмороженности» магнитного поля в поток высоко электропроводящей жидкости. Конвективные течения во внешнем ядре Земли способны поддерживать магнитное поле Земли на больших геологических временах, по крайней мере, порядка 3.5 млрд. лет.

Существенным этапом в понимании механизма МГД-динамо Земли стали результаты С.И. Брагинского, создавшего теорию МАК-волн и заложившего основы модели Z- динамо. Благодаря развитию вычислительной техники в теории гидромагнитного динамо за последние десятилетия удалось значительно углубить представления о механизме генерации геомагнитного поля и, наконец, получить результат, который рассматривается как теоретический пример инверсии геомагнитного поля [Glatzmaier, Roberts, 1995].

В настоящее время для описания гидромагнитного динамо стали широко использоваться модели, аналогичные той, которая была [Хачай, Миндубаев, 1991] применима для изучения конвективной устойчивости во внешнем ядре, и которые в зарубежной литературе получили наименование «*неупругого приближения*» (anelastic approximation) [Braginsky, Roberts, 1995; Roberts, Glatzmaier, 2000]. Это приближение значительно отличается от ранее обычно применявшегося приближения Буссинеска. Необходимо последовательное изучение механизма генерации геомагнитного поля и условий реализации МАК-волн в этом приближении.

Проблема генерации геомагнитного поля настолько сложна, что, несмотря на значительный прогресс в исследовании численных моделей “неупругого” приближения МГД-динамо, актуальными остаются многие качественные вопросы о механизме динамо-процесса. Их целесообразно исследовать при помощи более простых моделей.

Цель работы – исследование влияния сжимаемости вещества внешнего ядра Земли в т.н. “неупругом” приближении на механизм МГД генерации

геомагнитного поля и развитие неустойчивости МАК- волн.

Основные задачи исследований

1. Исследование возникновения конвективной неустойчивости в модели плоского слоя с учётом гидростатического распределения плотности по глубине и возмущения гравитационного потенциала.
2. Получение поправок к уравнениям генерации геомагнитного поля в кинематическом приближении динамо с учётом неоднородного гидростатического распределения плотности по слою.
3. Исследование возникновения неустойчивостей задаче для МАК-волн, в «неупругом приближении». Получение условий возникновения и спектра МАК-волн при различных распределениях азимутального магнитного поля, азимутальной скорости и вызывающей неустойчивость архимедовой силе.

Научная новизна работы

1. Проведено исследование конвективной устойчивости для модели гидромагнитного динамо в приближении, учитывающим неоднородное гидростатическое распределение плотности вещества внешнего ядра Земли.
2. Показано, что при тепловой конвекции учёт сжимаемости вещества и изменения гравитационного потенциала приводят к увеличению конвективной устойчивости системы относительно коротковолновых возмущений.
3. Для приближения медленных крупномасштабных течений в кинематической модели гидромагнитного динамо, аппроксимирующего процесс генерации магнитного поля, показано, что учёт изменения гидростатически равновесной плотности с глубиной приводит к дополнительным эффектам в механизме генерации, вклад которых соизмерим с величиной изученных ранее.
4. Показано, что частота неустойчивых МАК-волн в рассмотренной модели преимущественно определяется азимутальной составляющей скорости течения. Неустойчивость преимущественно развивается в областях внешнего ядра с пониженным значением азимутального магнитного поля. Учет сжимаемости вещества внешнего ядра Земли приводит к понижению частот МАК-волн для неустойчивостей, развивающихся около внешней границы.

Защищаемые научные положения

1. Показано, что гидростатическое распределение плотности и возмущение гравитационного потенциала при течении больших масс жидкости

оказывают влияние на возникновение конвекции в проводящей среде при наличии магнитного поля (на примере плоского слоя). Исследованы условия нейтральной устойчивости для этой модели.

2. Получены уравнения генерации геомагнитного поля для гидромагнитного динамо в кинематической постановке с учетом эффектов, обусловленных неоднородным распределением плотности во внешнем ядре Земли. Показано, что возникают дополнительные механизмы генерации, вклад которых соизмерим по величине с известными ранее.
3. Получено уравнение МАК-волн для модели гидромагнитного динамо сжимаемой жидкости в «неупругом» приближении. Теоретически полученная кратность частот спектра вековых вариаций геомагнитного поля в рассмотренных моделях удовлетворительно соответствует экспериментально наблюдаемой.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на Всероссийской научной конференции студентов – физиков. (Екатеринбург, 1995), международных конференциях: научные чтения памяти Ю.П.Булашевича (Екатеринбург, 2001, 2003, 2005), семинар Д.Г. Успенского, (Екатеринбург, 2006). Автор имеет 11 публикаций, 5 из которых в изданиях из списка ВАК. Основное содержание работы изложено в 8 публикациях.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Содержит 104 страницы текста, 9 рисунков, 6 таблиц и список литературы из 134 наименований.

Авторский вклад. В работах, выполненных совместно, постановка задачи и выбор метода ее решения принадлежат научному руководителю. Автор пользуется возможностью выразить благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Хачай Юрию Васильевичу, предложившему заняться задачей и с которым автор имел возможность обсуждать как направление исследований, так и их результаты.

Члена-корреспондента РАН, профессора В.И. Уткина автор благодарит за многолетнее благожелательное внимание к работе.

Автор благодарен коллективу лаборатории ядерной геофизики за понимание и поддержку.

Глава I. Имеющиеся результаты изучения механизма генерации геомагнитного поля (модели МГД-динамо Земли).

В главе приводится обзор результатов исследований геомагнитного поля [Яновский, 1978; Стейси, 1972], строения и состояния внутренних оболочек Земли по результатам сейсмологических исследований [Dziewonski, 1975;

Джекобс, 1979, Буллен, 1966; Жарков, Трубицын, 1980], и электромагнитных исследований [Дмитриев и др., 1988; Коломийцева, 1972; Стейси, 1972]. Приводятся результаты стандартного представления геомагнитного поля на поверхности Земли в виде разложения в ряды по сферическим функциям [Яновский, 1978]. Приводятся ограничения на модели генерации геомагнитного поля, вытекающие из результатов архео- и палеомагнитных исследований, приведенных в работах [Бурлацкая, Петрова, 1979; Hagee, Olson, 1989; Бурлацкая, 1991; Kono, Tanaka, 1995; Gogorza et al., 2000; Гурарий и др., 2000а,б; Петрова, 2002; Поспелова, 2002]. Затем излагаются основы магнитогидродинамической теории земного динамо, опирающиеся на результаты работ [Эльзассер, 1958; Брагинский, 1964, 1978, 1988, 1989; Tough, Roberts, 1968, Soward, 1971; Soward, Roberts, 1976; Cupal, 1988; Braginsky, Roberts, 1995; Roberts, Glatzmaier, 2000; Anufriev et al., 2005]. Приводятся важные для построения Z модели динамо, [Брагинский, 1975], теоремы Прудмана-Тейлора и Тейлора [Taylor, 1963]. Отмечается, что при изучении эволюции сложных динамических систем часто встречается ситуация, когда характерное время различных определяющих механизмов может изменяться на порядки. Для описания таких геофизических систем В.П.Мясников [Мясников, Маркарян, 1977] предложил многовременный подход. Аналогично этому в работе [Braginsky, Roberts, 1995] предложено все количественные переменные разделить на две составляющие: основную, медленно изменяющуюся и короткопериодную. Ниже используются эти результаты. Затем излагается развитое в работе [Braginsky, Roberts, 1995] так называемое “*неупругое приближение*” для медленных процессов МГД-динамо. При рассмотрении баланса энергии во внешнем ядре используются результаты работы [Lister, Buffett, 1995]. В последнем параграфе главы дается краткий обзор 3D моделей динамо и численные методы, применяемые при исследовании этих моделей на основе работ [Zhang, Busse, 1989, 1990; Hollerbach, Jones, 1993, 1995; Jones et al., 1995; Glatzmaier, Roberts, 1995а,б; Kuang, Bloxham, 1997, 1999; Решетняк, 2001]. Сравнительный анализ результатов, полученных к этому времени результатов приведен в [Walker, Barenghi, 1997; Dormy et al., 2000; Jones, 2000]. Подробный анализ различных численных моделей конвекции во вращающихся сферических слоях представлен в [Christensen et al., 2001]. В работе [Фрик и др., 2002] предложено решение уравнений динамо для тепловой конвекции в терминах каскадных моделей. В [Fournier et al., 2004] представлен спектрально-элементный метод для модели аксиально-симметричного потока в быстровращающемся объеме. Из-за трудностей в реализации численного решения полной трёхмерной задачи применяется так называемый 2.5 метод. Таким методом были исследованы в работах [Sarson et al., 1997, 1998; Sarson, Jones, 1999; Morrison, Fearn, 2000].

Исследуемые 3D модели позволяют воспроизвести ряд характерных черт, присущих магнитному полю Земли, полученных из наблюдательных данных,

таких как пространственный спектр магнитного поля, преобладание магнитной энергии над кинетической энергией конвективных течений. Продемонстрирована возможность инверсии геомагнитного поля [Glatzmaier, Roberts, 1995а,б].

Глава 2. Конвективная устойчивость сжимаемой жидкости.

Несмотря на бурное развитие вычислительной техники, численное решение системы уравнений конвекции в полной постановке в трёхмерном сферическом слое для турбулентного динамо с учётом тонких пограничных слоёв, внутреннего ядра Земли, термодинамических свойств и т.д. на сегодняшний день не представляется возможным. Поэтому в теории гидромагнитного динамо широко используются более простые пространственные модели такие, как тепловая конвекция в слое, ограниченном параллельными плоскостями. Для внешнего ядра Земли неоднородность статических величин невелика:

$$\frac{\delta T}{T} \approx \frac{\delta \rho}{\rho} \approx \frac{\delta W}{u_s^2} \approx 0.2,$$

где δT , $\delta \rho$, и δW - разница температуры, плотности и гравитационного потенциала на границах внутреннего ядра и мантии соответственно. Поэтому этими неоднородностями по сравнению с неопределённостью значений многих параметров ядра, таких как, теплопроводность, вязкость, электропроводность и т.д., можно было пренебречь. И для описания конвекции, как правило, использовалось *приближение Буссинеска*, в котором для уравнения баланса масс использовалось приближение $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

В [Roberts, Glatzmaier, 2000] отмечена необходимость в построении моделей в “*неупругом*” *приближении* $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ для тепловой и концентрационной конвекции. Обычно уравнения магнитной гидродинамики, учитывающие сжимаемость среды, используют при построении моделей динамо в применении к солнцу и планетам гигантам.

2.1 Тепловая конвекция для плоского слоя сжимаемой жидкости.

Рассматривается конвекция в слое жидкости между двумя жесткими, изотермическими, параллельными плоскостями. Пусть плоскость XOY совмещена с нижней границей слоя, ось z направлена вертикально вверх, \mathbf{k} – единичный вектор по оси z . Внешнее магнитное поле предполагается однородным и $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$.

Рассматривается развитие со временем малых возмущений T_1 , P_1 , \mathbf{b}_1 , U_1 от их стационарных значений. В линейном относительно этих малых возмущений приближении для безразмерных переменных имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} &= \Delta \Delta u - a \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta \frac{u}{\rho_1} \right) + Ra g_1 \Delta_1 (\rho_1 T_1 - f a W_1) + Ga \Delta \frac{\partial b_{1z}}{\partial z}, \\
\kappa \frac{\partial W_1}{\partial t} + \rho_1 T_1 &= \Delta W_1, \\
\frac{\text{Pr}_m}{\text{Pr}} \frac{\partial b_{1z}}{\partial t} + Ga \left(\frac{au}{\rho_1} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \Delta b_{1z}, \\
\rho_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} - u \right) &= \Delta T_1, \\
\nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{u}) &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b}_1 = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Условия на горизонтальных, жёстких, изотермических границах $z = 0$, $z = 1$ следующие:

$$T_1 = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad W_1 = 0. \tag{2.2}$$

Здесь в качестве единиц измерения выбраны: для времени - L^2/κ ; скорости - κ/L ; температуры - βL ; потенциала - $4\pi G\rho_0\alpha\beta L^3$; магнитного поля $\frac{k}{L} \sqrt{\frac{\rho_0 v}{\mu_0 \eta}}$,

$$Ra = \frac{g\alpha\beta L^4}{\kappa\nu}, \quad Ga = B_0 L / \sqrt{\mu_0 \rho_0 \eta \nu}, \quad \text{Pr} = \nu / \kappa, \quad \text{Pr}_m = \nu / \eta. \quad \text{Гидростатическое}$$

распределение плотности $\rho_a(z) = \rho_0 \rho_1(z)$, $\rho_1(z) = (1 + 0.5a - az)$,

$\Delta_1 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. $f = \rho_a / \rho_0$, ρ_0 - среднее значение плотности по слою.

Система (2.1) при $Ga=0$, т.е. для непроводящей среды или в отсутствии магнитного поля переходит в рассмотренную в [Хачай, 1987], а для приближения Буссинеска при $a=0$ - в вариант, описанный в [Гершуни, Жуховицкий, 1972]. Частными решениями (2.1) являются функции вида $f = f_0 e^{-\lambda_1 t}$. Если декремент затухания λ_1 – действительное число, то говорят о неустойчивости монотонного типа. Развитие неустойчивости со временем определяется знаком $\text{Re}\lambda_1$; при $\text{Re}\lambda_1 > 0$ возмущения со временем затухают и состояние механического равновесия устойчиво. Напротив, при $\text{Re}\lambda_1 < 0$ возмущения нарастают, и возникает конвекция. Если λ_1 – комплексное число, то возникает неустойчивость колебательного типа. Здесь рассматривается состояние нейтральной устойчивости, когда $\lambda_1=0$, являющееся границей между устойчивым и неустойчивым состояниями. Для этого состояния систему можно упростить, исключив b_1 :

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta u - a \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta \frac{u}{\rho_1} \right) + Ra g_1 \alpha \Delta_1 (\rho_1 T_1 - f a W_1) + Ga^2 \left(a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{\rho_1} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0, \\
\Delta W_1 &= \rho_1 T_1, \\
\Delta T_1 &= -\rho_1 u.
\end{aligned} \tag{2.3 а,б,в}$$

В рассматриваемом случае исключение возмущений поля не приводит к

повышению порядка системы (2.3). Поэтому граница устойчивости и форма нейтральных возмущений не зависят от граничных условий для магнитного поля.

Решение системы (2.3) с граничными условиями (2.2) проводится с использованием метода Бубнова-Галеркина [Гершуни, Жуховицкий, 1972]. Учитывая, что ни коэффициенты в (2.3), ни граничные условия не зависят от горизонтальных координат, решения можно искать на функциях периодических в плоскости $X\bar{Y}$:

$$\begin{aligned} T_1 &= \theta(z) \sin k_1 x \sin k_2 y, \\ w_1 &= w(z) \sin k_1 x \sin k_2 y. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для пробной функции u_z аналогично [Хачай, 1987] примем $u = (z^2(1-z)^2 / \rho_1) \sin k_1 x \sin k_2 y$. Состояние нейтральной устойчивости характеризуется значениями числа Рэлея Ra , как функции волнового числа k ($k^2 = k_1^2 + k_2^2$), коэффициента a и числа Гартмана Ga . Учитывая то, что граничные условия полученной в результате системы не зависят от времени, решения уравнений (2.3.б) и (2.3.в) после подстановки в них (2.4) находились численно методом установления с использованием неявной консервативной разностной схемы [Берковский, Ноготов, 1976].

В соответствии с методом Галёркина найденные решения для $\theta(z)$ и $w(z)$ подставляются в выражение (2.3.а), которое умножается на $v(z) = z^2(1-z)^2 / \rho_1$ и интегрируется по слою.

Результаты вычислений иллюстрируются рис. 2., показывающим зависимость Ra от волнового числа k или размерной длины волны $\lambda = 2\pi h / k$. Кривые 1-3 получены для распределения $g_1(z) = 566 + 868z$ в отсутствие магнитного поля $Ga = 0$ при $a = 0, 0.2, 0.4$. Учет сжимаемости в исследованном диапазоне длин волн приводит к повышению устойчивости; при $a = 0.2$ порядка 10%, при $a = 0.4$ порядка 25 %.

Кривые 4-6 получены при соответствующих значениях $a = 0, 0.2, 0.4$ для $Ga = 100$. Видно, что наличие магнитного поля, как показано в [Гершуни, Жуховицкий, 1972], приводит к повышению устойчивости системы. Длинноволновая область при $k < 1$ здесь нами не рассматривалась, поскольку нас интересует приложение к сферическому слою внешнего ядра.

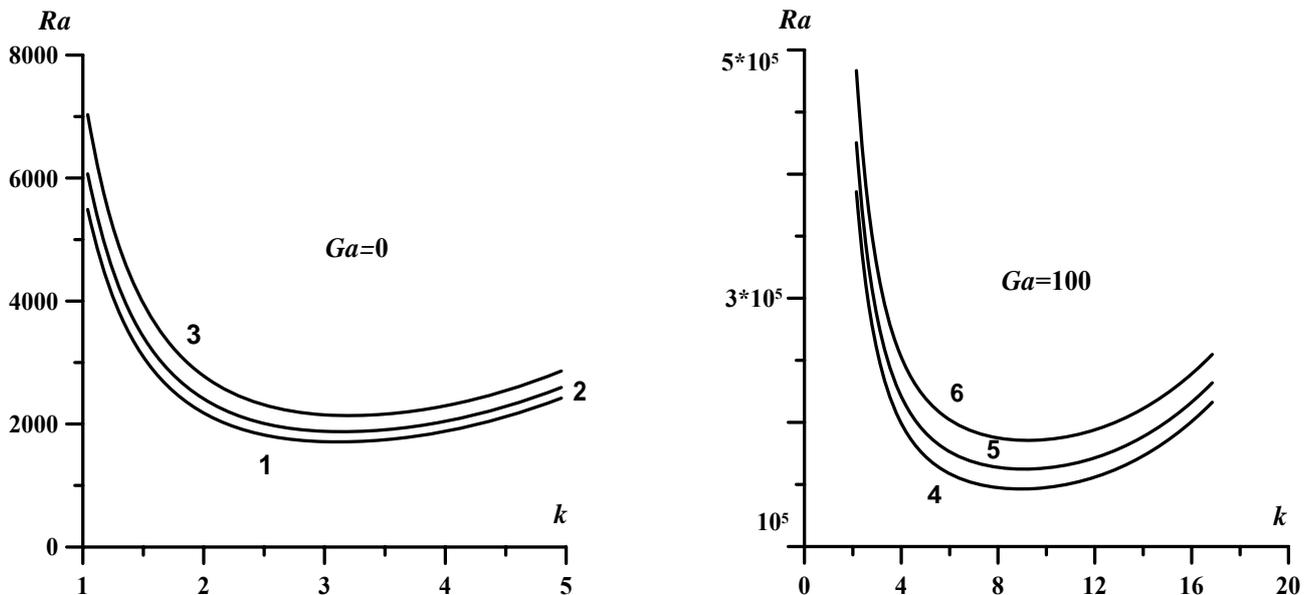


Рис.2. Кривые нейтральной устойчивости $Ra=Ra(k)$, $g_1(z)=566+868z$, $a=0$ (1,4), $a=0.2$ (2,5), $a=0.4$ (3,6); $Ga=0$ (1,2,3), $Ga=100$ (4,5,6).

Полученные результаты необходимо учитывать при рассмотрении моделей, учитывающих тонкие пограничные слои, где существенна роль вязкости. Результаты анализа конвективной устойчивости плоского слоя сжимаемой жидкости с последующим учетом вращения представляют интерес при изучении конвекции в полярных областях земного ядра.

Глава 3. Уравнения генерации геомагнитного поля при течении сжимаемой жидкости.

Уравнения индукции и баланса массы однокомпонентной однофазной жидкости можно записать:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \Phi - [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = -\eta \nabla \times \mathbf{B}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.1б)$$

Или после применения к (3.1a) операции rot:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.2)$$

Здесь \mathbf{A} – векторный потенциал, Φ – скалярный потенциал, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ – магнитное поле, \mathbf{u} – скорость, η – коэффициент магнитной диффузии, $\rho(s, z)$ – гидростатическое распределение плотности.

Согласно теореме Каулинга [Cowling, 1933] невозможно аксиально-симметричное динамо несжимаемой жидкости с магнитными силовыми линиями, лежащими в меридиональных плоскостях. Он показал, что в стационарном динамо магнитные силовые линии обязательно должны образовывать трехмерную конфигурацию. Теорема Каулинга не только выявляет основное препятствие для теории динамо, но и указывает возможный

путь построения приближенной модели.

Одна из моделей кинематического динамо, реализующая генерацию магнитного поля в несжимаемой жидкости с высокой электропроводностью рассмотрена Брагинским, при этом крупномасштабный эффект спиральности проявляется одновременно с очень быстрым неоднородным вращением u_φ , так что для магнитного числа Рейнольдса выполняется соотношение:

$$R_m = Lu_\varphi / \eta \gg 1.$$

В нашем рассмотрении эффект спиральности создается крупномасштабными движениями в отличие от принятого в теории ШКР (Штеенбека, Краузе, Рёдлера) эффекта спиральности, создаваемого мелкомасштабной турбулентностью. Поэтому мы используем для условий во внешнем ядре Земли закон сохранения масс сжимаемой жидкости в виде (3.1б).

Рассматривается однородная проводящая жидкость в объеме, имеющем форму тела вращения в цилиндрической системе координат z, s и φ . Индексом p отмечены меридиональные составляющие векторов, например,

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{1}_z u_z + \mathbf{1}_s u_s, \quad \mathbf{B}_p = \mathbf{1}_z B_z + \mathbf{1}_s B_s.$$

Вводится операция усреднения по φ , выделяющую аксиально-симметричную часть любой величины. Для скалярной функции координат имеем

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(s, z, \varphi) d\varphi.$$

Усредняется каждая составляющая вектора.

Все величины представлены в виде аксиально-симметричной части и небольшой добавки, чисто переменной по φ :

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}', \quad \text{где } \langle \mathbf{b}' \rangle = 0, \quad \mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad \text{где } \langle \mathbf{u}' \rangle = 0.$$

Принято $A = \langle A_\varphi \rangle$ и $B = \langle B_\varphi \rangle$, усреднив (3.1а) и (3.2) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{s} \mathbf{u}_p \cdot \nabla (sA) &= \eta \Delta_1 A + \mathcal{E}_\varphi \\ \frac{\partial B}{\partial t} + s \mathbf{u}_p \cdot \nabla \left(\frac{B}{s} \right) - [\nabla \xi \times \nabla s A] - B \frac{\mathbf{u}_p \cdot \nabla \rho}{\rho} &= \eta \Delta_1 B + (\text{rot } \mathcal{E})_\varphi, \end{aligned}$$

Где \mathcal{E} имеет смысл ЭДС для аксиально-симметричных токов:

$$\mathcal{E} = \left\langle [\mathbf{u}' \times \mathbf{b}'] \right\rangle.$$

Далее используя принятые в [Брагинский, 1964а] асимптотики

$$b' \approx BR_m^{-1/2}, \quad u' \approx uR_m^{-1/2}, \quad u_p \approx uR^{-1},$$

так что всё движение близко к аксиально-симметричному, а спиральные траектории, описываемые частицами жидкости, - очень пологие. Искомое решение имеет вид

$$\mathbf{b}' = \sum_{n=1} \mathbf{b}^{(n)}, \quad b^{(n)} \approx BR_m^{-n/2}.$$

Рассматривается вариант, в котором в выбранной системе координат все функции медленно изменяются со временем и выполняются соотношения:

$$\partial/\partial t \approx \omega LR_m \approx \eta/L^2. \quad (3.3)$$

Это приближение (3.3) означает, что рассматривается только стационарная или медленно изменяющаяся модель динамо. Согласно [Брагинский, 1964а] вводится следующее обозначение. Если F' – любая чисто переменная по φ величина $\langle F' \rangle = 0$, то \hat{F}' будем обозначать величину, удовлетворяющую условиям $\partial_1 \hat{F}' / \partial \varphi = F'$, $\langle \hat{F}' \rangle = 0$.

Вводятся *эффективные* величины

$$A_e = A + wB, \quad \mathbf{u}_{eP} = \mathbf{u}_P + \text{rot}(\mathbf{1}_\varphi wu), \quad (3.4)$$

где $w = \frac{s}{2} \left\langle \left[\mathbf{v}_P \times \hat{\mathbf{v}}_P \right]_\varphi \right\rangle$, $\mathbf{v}_P = \frac{\mathbf{u}'_P}{u}$.

В переменных A_e , B , \mathbf{u}_{eP} выражений (3.4) уравнения генерации сжимаемой среды принимают следующий вид [Хачай, Миндубаев, 2000]:

$$\frac{\partial A_e}{\partial t} + \frac{1}{s} \mathbf{u}_{eP} \cdot \nabla (sA_e) - wB \frac{\mathbf{u}_{eP} \cdot \nabla \rho}{\rho} = \eta \Delta_1 A_e + \eta B \Gamma, \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + s \mathbf{u}_{eP} \cdot \nabla \left(\frac{B}{s} \right) - B \frac{\mathbf{u}_{eP} \cdot \nabla \rho}{\rho} = \left[\nabla \xi \times \nabla sA \right]_\varphi - s \frac{wu}{\rho} \left[\nabla \left(\frac{B}{s} \right) \times \nabla \rho \right]_\varphi + \eta \Delta_1 B, \quad (3.5b)$$

где $\Gamma = \frac{1}{s} \left\langle \left[\mathbf{v}_P \times \hat{\mathbf{v}}_P \right] + \left[\mathbf{v}_P \times \frac{\partial_1 \mathbf{v}_P}{\partial \varphi} \right] \right\rangle_\varphi + \left\langle \nabla_P (rv_r) \cdot \nabla_P \hat{v}_z \right\rangle$.

Уравнения (3.5) отличаются от соответствующих уравнений генерации полученных в [Брагинский, 1964а], наличием членов соответствующих учету сжимаемости. При этом форма коэффициента генерации Γ и эффективных величин сохраняется. Используя, уравнения генерации при построении модели Z динамо для несжимаемой жидкости Брагинским несимметричные скорости \mathbf{u}' не вычислялись, а коэффициент генерации Γ задавался определенной формы для того, чтобы получить сходящиеся решения. Кроме этого, используя свойство соленидальности для векторов \mathbf{u}_{ep} и \mathbf{B}_{ep} , формально игнорируется различие между *средними* и *эффективными* величинами (3.4). В нашем рассмотрении уравнений генерации для сжимаемой жидкости, для того, чтобы оценить вклад дополнительных членов необходимо найти несимметричные скорости \mathbf{u}' (выражение для w). Качественно задача нахождения скоростей \mathbf{u}' в рассматриваемой нами модели динамо с сильным полем и крупномасштабной генерацией сводится к задаче о МАК-волнах.

Глава 4. Исследование устойчивости МАК-волн.

Изучение спектра вековых вариаций по археомагнитным и палеомагнитным данным, позволили установить, что данные вариации имеют не гармонический характер, а представляют циклические колебания, ритмы. Характерные

величины периодов колебаний близки к значениям: $T \sim 360, 600, 900, 1200, 1800, 2700, 3600, 5400$ и 9000 лет

[Петрова, 2002]. Объяснение спектра вековых вариаций, является неотъемлемой частью задачи построения самосогласованной модели гидромагнитного динамо Земли. Обсуждению компонент спектра геомагнитного поля и соответствующих им механизмов с единой точки зрения посвящена работа [Брагинский, 1970 б]:

1. Основная частота ~ 9000 лет связана с механизмом самоподдержания поля и с основной крупномасштабной конвекцией.
2. Колебания средних частот порядка 10^3 лет (МАК-волны)
3. Колебания высоких частот с периодами $\sim 10^2$ лет и меньше (крутильные колебания).

Колебания основного спектра порядка тысячи лет, по представлению Брагинского, есть распространяющиеся в азимутальном направлении МАК-волны. Рассматриваются малые колебания идеальной электропроводящей жидкости около исходного состояния, которому соответствуют некоторые *средние* величины:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{1}_\varphi s \zeta(s, z), \quad \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{1}_\varphi \bar{B}_\varphi(s, z), \quad \bar{C} = \bar{C}(s, z).$$

$C = (\rho - \rho_0) / \rho_0$ – относительное превышение локальной плотности ρ над гидростатической ρ_0 , связанное с отклонениями от равновесных значений температуры или концентрации примеси. Локальная угловая скорость ζ принимается порядка скорости западного дрейфа. Средним меридиональным полем \bar{B}_r по сравнению с B_φ пренебрегают. Средние величины считаются стационарными. Также пренебрегают диссипативными процессами, например, $\eta \nabla^2 \bar{\mathbf{V}} : \partial \bar{\mathbf{V}} / \partial t$, вязкостью и диффузией. Обычно полагают, что для земного динамо справедливы следующие соотношения:

$$g C_p \approx \tau^2 \approx 2 \Omega \zeta, \quad 2\pi / \zeta \approx 10^3 \text{ лет}, \quad 2\pi / \tau \approx 1 \text{ год},$$

где $\tau = \bar{B}_0 / s \sqrt{\mu_0 \rho_0} = c_a / s$. τ – частота и c_a – скорость альфвеновских волн.

При линейном анализе системы уравнений для возмущений, показано, что в условиях земного ядра имеются два четко различающихся типа колебаний: известные *инерциальные волны* с частотой порядка частоты вращения Земли и более низкочастотные *МАК-волны*. В МАК-волнах устойчивость обеспечивается балансом между магнитными, архимедовыми и кориолисовыми силами.

4.1 Уравнения возмущений сжимаемой жидкости.

Система уравнений магнитной гидродинамики сжимаемой жидкости в отсутствии диссипации магнитного поля, в пренебрежении, меридиональными составляющими магнитной индукции и скорости для малых возмущений \mathbf{v}' , \mathbf{B}' , C' , p' аналогично [Брагинский, 1967], может быть записано в следующем виде:

$$0 = -\rho_1 \nabla \frac{p'}{\rho_a} - \nabla \frac{B_\varphi b'_\varphi}{\rho_0} - \rho_1 2\Omega \times \mathbf{v}' + \rho_1 C' \mathbf{g} + \left[(\bar{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \mathbf{B}' + (\mathbf{B}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{B}} \right] / \mu_0 \rho_0, \quad (4.1.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}') = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0, \quad (4.1.2,3)$$

$$\begin{aligned} & \partial \mathbf{B}' / \partial t + \zeta \partial_1 \mathbf{B}' / \partial \varphi - (\bar{\mathbf{B}}_\varphi / s) \partial_1 \mathbf{v}' / \partial \varphi \\ & - \mathbf{1}_\varphi s \left[(\mathbf{B}'_P \cdot \nabla \zeta) - \mathbf{v}'_P \cdot \nabla (\bar{B}_\varphi / s) - (\bar{B}_\varphi / s) \frac{\mathbf{v}'_P \cdot \nabla \rho_1}{\rho_1} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\partial C' / \partial t + \zeta (\partial C' / \partial \varphi) + \mathbf{v}'_P \cdot \mathbf{C}_P = 0, \quad (4.1.5)$$

где ρ_0 – средняя плотность во внешнем ядре Земли, $\rho_1 = \rho_1(s, z)$ – безразмерная функция, характеризующая равновесное меридиональное распределение плотности по слою, $C = (\rho_a - \rho_0 \rho_1) / \rho_0 \rho_1$ – относительное превышение локальной плотности ρ_a над гидростатической $\rho_0 \rho_1$. Единица в индексе $\partial_1 / \partial \varphi$, означает, что при дифференцировании по φ орты $\mathbf{1}_s, \mathbf{1}_\varphi$ считаются постоянными. В уравнении (4.1.1) отброшены инерциальные члены, а в (4.1.5) диссипативные члены.

Далее для переменных \mathbf{v}' и \mathbf{B}' вводятся вектора \mathbf{w} и \mathbf{y} таким образом, что справедливо $\text{div} \mathbf{w} = \text{div} \mathbf{y} = 0$ и с использованием (4.1.2) и (4.1.3) имеем:

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \frac{\text{rot}(\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{w})}{\rho_1}, \quad \mathbf{B}' = \text{rot}(\mathbf{y} \times \bar{\mathbf{B}}), \quad C' = -\frac{1}{\rho_1} \mathbf{C}_P \mathbf{w}_P.$$

Решения для этих переменных ищутся в виде:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(s, z) e^{i(m\varphi - \omega t)}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(s, z) e^{i(m\varphi - \omega t)}$$

Получено соотношение между \mathbf{y} и \mathbf{w} :

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\rho_1} \mathbf{w} - \mathbf{1}_\varphi \left(\frac{i s \mathbf{w}_P \cdot \nabla \rho_1}{m \rho_1^2} \right). \quad (4.3)$$

Данное выражение (4.3) показывает, что смещение силовых линий магнитного поля \mathbf{y} от средних значений, для модели учитывающую сжимаемость более существенны во внешних областях жидкого ядра Земли, по сравнению со смещениями \mathbf{w} ($\rho = \text{const}$).

4.2 Условия устойчивости.

Для количественного определения спектра МАК-волн в земном ядре требуется в первую очередь знание истинных *средних* $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{1}_\varphi s \zeta(s, z)$, $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{1}_\varphi \bar{B}_\varphi(s, z)$, $\bar{C} = \bar{C}(s, z)$, которые находятся из полных 3-D моделей динамо. Теория МАК-волн, разработанная Брагинским является линейной, поэтому мы можем при заданных *средних*, оценить спектральный состав волн, качественный вид распределений возмущений, но не можем определить амплитуды возмущений. Всё это создаёт трудности в построении теории МАК-волн и соответственно в нахождении несимметричных составляющих поля \mathbf{B}' и скорости \mathbf{u}' . По рассчитанным современным 3-D моделям в условиях внешнего ядра Земли магнитное поле является сильно неоднородным. Поэтому

в отличие от работ Брагинского [Брагинский, 1967, Braginsky, 1980], где рассмотрены модели распространения МАК-волн в однородном магнитном поле, в данной работе исследуется модель с неоднородным магнитным полем.

Рассматривается течение в тороидальной области с прямоугольным сечением малой кривизны, $0 < x < L$, $0 < z < z_1$, где $x = s - s_0$ при $s_0 \rightarrow \infty$, т.е. переходим в декартову систему координат. Предполагаем, что $k_\phi = m/s_0 = const$, векторы \mathbf{g} и \mathbf{C}_p параллельны. Уравнение МАК-волн для идеальной сжимаемой жидкости в рассматриваемой модели выглядит:

$$\nabla_P \left(\frac{B_1^2}{\rho_1} \right) \nabla_P \cdot \mathbf{y}_P - \left(\frac{B_1^2}{\rho_1} \right) k_\phi^2 \mathbf{y}_P + k_\phi^2 \alpha_x \mathbf{1}_x (\rho_1 y_x) = (u(x) - \lambda) \mathbf{1}_z \times \frac{\partial (\rho_1 \mathbf{y}_P)}{\partial z},$$

где за единицу длины принято L , $\alpha_x(x) = -g_x C_x / c_{a0}^2 k_\phi^2$, $\lambda = 2\Omega L \omega / c_{a0}^2 k_\phi$, $u(x) = 2\Omega L V_\phi(x) / c_{a0}^2$. Среднее значение альфвеновской скорости в области $c_{a0}^2 = B_{\phi 0}^2 / \mu_0 \rho_0$. Для распределения магнитного поля и ускорения силы тяжести принимается соответственно $B_\phi(x) = B_{\phi 0} B_1(x)$ и $g_x(x) = g_{x0} g_1(x)$.

Граничные условия:

$$y_z = 0 \text{ на } z = 0, z = z_1; \quad y_x = 0 \text{ на } x = 0, x = 1.$$

Получено дисперсионное соотношение:

$$\lambda = u \pm \sqrt{k_\phi^2 \mathcal{B}(\mathcal{B}' - \alpha_x \rho_1) / k_z^2 \rho_1^2} = u \pm \sqrt{\mathbf{N}}, \quad (4.4)$$

где $\mathcal{B}' = B_1^2(x) / \rho_1(x)$. Оно отличается от соответствующего (3.5) в [Брагинский, 1967] тем, что получено для неоднородных по координате x распределений магнитного поля и плотности. Уравнение (4.4) показывает, что частота МАК-волн для неустойчивых мод в рассмотренной модели, определяется геострофической скоростью в тех областях, где нарушается условие устойчивости, т.е. подкоренное выражение принимает отрицательное значение. Отмеченное свойство, соответствует, полученному из наблюдаемых данных, так называемому свойству *кратности* частот, когда для вековых вариаций разного периода, характерна одна и та же скорость распространения. Из (4.4) видно, что наиболее легко развивается неустойчивость в областях с пониженным значением азимутального магнитного поля, или в областях, где \mathcal{B}'_ϕ меняет свой знак. Кроме того, из уравнения (4.4) следует, что при учете сжимаемости среды, частоты колебаний неустойчивых мод МАК-волн не изменяются.

На рис.4.1 приводится зависимость подкоренного выражения \mathbf{N} уравнения (4.4) при распределении $B_1(x)$ для вариантов для несжимаемой жидкости и сжимаемой. Для $B_1(x)$, плотности $\rho_1(x)$, для ускорения свободного падения $g_x(x)$, градиента плотности $C_x(x)$ принимаются следующие соотношения:

$$B_1(x) = \sqrt{2} \sin(2\pi x), \quad \rho_1(x) = (1.1 - 0.2x), \quad g_x(x) = 0.868x + 0.565, \quad C_x(x) = -10(x^2 - x^3).$$

Подкоренное выражение \mathbf{N} принимает отрицательное значение в областях, где поле $B_1(x)$ меняет знак и вблизи внешней границы области. Учет

сжимаемости приводит к уменьшению области локализации возмущений около внешней границы.

Направление распространения МАК-волн можно объяснить знаком геострофической скорости в тех областях, где нарушается условие устойчивости. Для западного направления дрейфа принимается отрицательное значение скорости, соответственно для восточного – положительное.

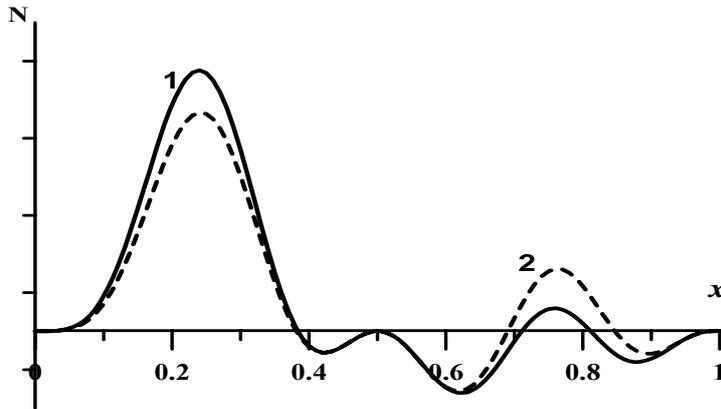


Рис 4.1. Значения подкоренного выражения N выражения (4.4). Кривая 1 соответствует $\rho_1 = 1$, кривая 2 - $\rho_1 = (1.1 - 0.2x)$ [Миндубаев, 2006].

4.3 Численные модели возникновения МАК-волн.

Получены численные решения для модели распространения МАК-волн в тороидальной области с малой кривизной. На численных примерах при заданных распределениях магнитного поля $B_1(x)$:

$$B1 = \sqrt{2} \sin(\pi x), \quad B2 = \sqrt{2} \sin(2\pi x).$$

Показано, что неустойчивые МАК-волн развиваются главным образом в областях, где поле $B_1(x)$ меняет знак и вблизи внешней границы области.

В модели распространения МАК-волн в тороидальной области с малой кривизной принято условие, $k_\phi = m/s_0 = \text{const}$, что соответствует высокочастотным колебаниям $m \gg 1$. Физически интересны случаи для малых m , что соответствует волнам, характерный размер которых сравним с размерами области. В данной работе рассматривается течение проводящей сжимаемой жидкости в торе прямоугольного сечения, вращающемся вокруг оси z . $-z_1 < z < z_1$, $0 < x < L$, где $x = (s - 0.35)/0.65$, $L = R_1 - R_2$; R_1 и $R_2 = 0.35R_1$ - соответственно размеры внешнего и внутреннего радиусов тора. Уравнения для малых возмущений магнитного поля, скорости, концентрации и давления описываются системой (4.1). Векторы \mathbf{g} и \mathbf{C}_p принимаются параллельными и направленными вдоль оси s . Для распределения азимутального магнитного поля примем $B_\phi(x) = B_{\phi 0} B_1(x)$. Решения будем искать в виде:

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{1}_z y_z(x) \sin k_z(z + z_1) + \mathbf{1}_x y_x(x) \cos k_z(z + z_1),$$

где $k_z = n_z \pi / 2z_1$, n_z - целое. При принятых условиях задача сводится к одномерной и решается линейная система на собственные значения λ и собственные функции $y_x(x)$ и $y_z(x)$:

$$\begin{aligned} L_{11}y_x + L_{12}y_z &= \lambda y_x, \\ L_{21}y_x + L_{22}y_z &= \lambda y_z. \end{aligned} \quad (4.5)$$

где за единицу длины принято R_1 ,

$$\begin{aligned} \alpha_x(x) &= -g_x(x)C_x(x)R_1^2 / c_{a0}^2, \quad \lambda = 2\Omega\omega R_1^2 / c_{a0}^2 m, \\ u(x) &= 2\Omega\zeta_1 R_1^2 / c_{a0}^2, \quad \bar{B} = B_1^2(x) / \rho_1, \quad c_{a0}^2 = B_{\varphi 0}^2 / \mu_0 \rho_0. \end{aligned}$$

Среднее значение квадрата альфвеновской скорости в области и плотности принимаются соответственно $g_x(x) = g_{x0}g_1(x)$, $C_x(x) = C_0C_1(x)$, $\rho_x(x) = \rho_0\rho_1(x)$. Граничные условия задаются в виде:

$$y_z = 0 \quad z = -z_1, \quad z = z_1; \quad y_x = 0 \quad x = 0, \quad x = 1.$$

Для численного решения системы (4.5) использовался метод аналогичный тому, что применялся для модели с бесконечным радиусом. В области $0 < x < 1$ задавалась однородная пространственная сетка с постоянным шагом $h = x_{i+1} - x_i = 1/36$, производные заменялись центральными разностями с квадратичной аппроксимацией. Полученная в результате система на собственные значения и собственные функции решалась с использованием математической библиотеки IMSL Fortran 90 MP.

Для безразмерных распределений ускорения силы тяжести, градиента концентрации, плотности и геострофической скорости принято:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (0.566 + 0.868x), \quad C_1(x) = -D(x^2 - x^3), \\ \rho_1(x) &= (1.1 - 0.2x), \quad u(x) = u_0(1 - x^2)((0.51)^{1/2} - (1 - x^2)^{1/2} / (1 - (0.51)^{1/2})), \end{aligned}$$

где D – коэффициент. Для скорости $u(x)$ принято распределение $u_2(x)$ из [Braginsky, 1980] с $u_0 = 100$. Показано, если параллельные векторы \mathbf{g} и \mathbf{C}_p имеют только составляющую по x , то частота и рост возмущений неустойчивых мод практически не зависят от величины коэффициента D .

Влияние архимедовой силы проявляется, если она имеет поперечную составляющую α_z . Для этого вектора \mathbf{g} и \mathbf{C}_p повернуты на малый положительный угол $\pi/36$. Тогда с допустимой точностью в рассматриваемой задаче, можно принять $\alpha_{xn} \approx \alpha_x$ и $\alpha_z \approx \alpha_x (\pi/36)$. Рассчитаны две модели с учетом α_z для распределений магнитного поля $B_1(x)$:

$$B1 = \begin{cases} \sqrt{2.75} \sin(1.5\pi x), & 0 \leq x \leq 2/3, \\ -\sqrt{0.5} \sin(3\pi x), & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad B2 = \begin{cases} \sqrt{2.75} \cos(0.75\pi x), & 0 \leq x \leq 2/3, \\ -\sqrt{0.5} \sin(3\pi x), & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Получены собственные значения λ_i для рассчитанных распределений при $D=50$. С учётом α_z появляются новые неустойчивые моды, в частности моды, соответствующие стоячим волнам.

При учете сжимаемости для собственных значений с положительной действительной частью, частоты волн уменьшаются, что соответствует уменьшению области локализации возмущений вблизи внешней границы. Для частот с отрицательной действительной частью, учет сжимаемости не приводит к заметному изменению частот и росту возмущений. Заметное совпадение в

собственных значениях проявляется для $m=1$ и $k_z=\pi$; $m=2$ и $k_z=2\pi$ и $m=3$ и $k_z=3\pi$, что соответствует свойству кратности частот.

Распределения $y_z(x)$ для собственных значений с отрицательной действительной частью расположены в области $0 < x < 2/3$, соответственно с положительной в области $2/3 < x < 1$. При учете сжимаемости, при заметном изменении частот вблизи внешней границы, распределения для несжимаемой и сжимаемой сред мало отличаются. Наоборот, при малом различии в собственных значениях, соответствующих западному дрейфу, распределения отличаются заметно. При этом для собственных значений с положительной действительной частью (восточный дрейф), при совпадении для B_1 и B_2 распределения магнитного $B_1(x)$ поля в области $2/3 < x < 1$ совпадают и собственные значения и распределения $y_z(x)$. Это показывает, что частоты и распределение возмущений, качественно определяются азимутальным магнитным полем одного знака, где локализованы возмущения. Рассмотрено линейное приближение описания МАК-волн и решается задача с постоянными распределениями магнитного поля B_φ , геострофической скоростью ζ и частотой архимедовых источников (параметр α). В более общей постановке уравнения МАК-волн необходимо решать совместно с уравнениями генерации и движения. Можно ожидать, что уже в пределах основного периода, порядка 10^4 лет, средние величины будут медленно меняться, поэтому и частоты, и амплитуды волн также могут медленно изменяться.

Заключение.

Проведено исследование конвективной устойчивости для модели гидромагнитного динамо в приближении, учитывающем неоднородное гидростатическое распределение плотности. Показано, что при тепловой конвекции учёт сжимаемости вещества и возмущения гравитационного потенциала, вызванного течением больших масс вещества различной плотности, приводят к повышению устойчивости системы для коротковолновых возмущений.

Получены уравнения генерации магнитного поля для условий внешнего ядра Земли с учетом изменения гидростатически равновесной плотности вещества с глубиной. Это нелинейное дифференциальное уравнение содержит вклад от эффектов, соизмеримых по величине с известными ранее.

Временной спектр неустойчивых МАК-волн в рассмотренной модели существенно зависит от структуры и величины азимутального магнитного поля, а частота качественно определяется азимутальной скоростью течений. Теоретически полученная кратность частот спектра периодов вековых вариаций геомагнитного поля в рассмотренных моделях удовлетворительно соответствуют экспериментально наблюдаемым.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях из «Перечня ВАК...»

Миндубаев М.Г. Уравнения МАК-волн для динамо сжимаемой жидкости.// Геомagnetизм и аэрономия. 2003. Т.43. №1. С.13-16.

Миндубаев М.Г. МАК-волн в неоднородном магнитном поле. //Ядерная геофизика. Геофизические исследования литосферы. Геотермия. Вторые научные чтения памяти Ю.П.Булашевича. Материалы. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН С. 2003б. С.70-71.

Миндубаев М.Г. Генерация высокочастотной части спектра вековых вариаций геомагнитного поля.// Глубинное строение. Геодинамика. Тепловое поле Земли. Третьи научные чтения Ю.П.Булашевича. Материалы. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2005.С.151.

Миндубаев М.Г. Условия устойчивости для МАК-волн в ядре Земли.// Геомagnetизм и аэрономия. 2006. Т.46. №1. С.115-122.

Миндубаев М.Г. Устойчивость МАК-волн в ядре Земли для модели сжимаемой среды.// Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 33-й сессии Международного семинара им. Д.Г.Успенского. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2006. С.217-221.

Прочие публикации:

Хачай Ю.В., Миндубаев М.Г. Конвективная устойчивость сжимаемой гравитирующей проводящей жидкости в магнитном поле.// В кн: Теория, методы интерпретации и математического моделирования геофизических полей. Свердловск, УрО АН СССР, 1991.С.17-23.

Миндубаев М.Г. Конвективная устойчивость плоского слоя вращающейся электропроводной жидкости. // Всероссийская научная конференция студентов – физиков №3. Тез. Докладов. УрГУ. Екатеринбург. 1995г. стр. 167.

Хачай Ю.В., Миндубаев М.Г. О дополнительных эффектах генерации поля в модели гидромагнитного динамо сжимаемой жидкости.// Уральский геофизический вестник. Екатеринбург. ИГФ УрО РАН. 2000. №1. С.114-116.

Хачай Ю.В., Миндубаев М.Г. Новые эффекты в физике МГД Земли.// Физика космоса. Международная конференция. Тезисы. докл. Екатеринбург. УрГУ. 2000, с 19.

Миндубаев М.Г. Уравнение МАК-волн для медленного динамо сжимаемой жидкости.// Первые научные чтения памяти Ю.П.Булашевича. Ядерная геофизика. Геофизические исследования литосферы. Геотермия. Тезисы. Екатеринбург. ИГФ УрО РАН. 2001. С. 53-54.

Миндубаев М.Г. МАК-волны в неоднородном магнитном поле ядра Земли// Уральский геофизический вестник. Екатеринбург. ИГФ УрО РАН. 2004. №6. С.91-99.